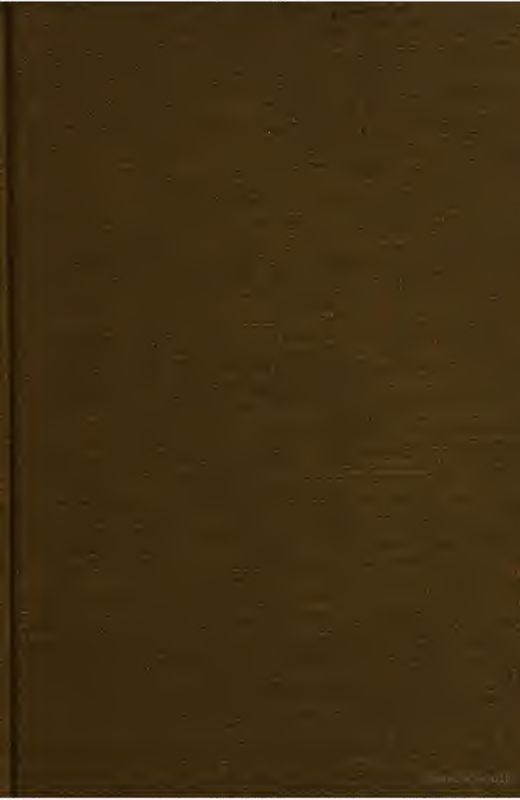


LEZIONI

DI

GEODESIA ELEMENTARE

PER SERVIRE DI NORMA

AL RILEVAMENTO CATASTALE

LETTE

DA PIETRO MYA

nelle Scuole Censuarie
instituite dal Ministero delle Finanze

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
1854.

LEZIONI

DI

GEODESIA ELEMENTARE

PER SERVIRE DI NORMA

AL RILEVAMENTO CATASTALE

LETTE

DA PIETRO MYA

nelle Scuole Censuarie
instituite dal Ministero delle Finanze

TORINO
DALLA STAMPERIA REALE
1854

AL LETTORE.

In queste Lezioni, nelle quali io non doveva sviluppare se non che quelle parti della geodesia che possono avere le loro applicazioni nell'operazione censuaria, non descrissi tutti gli stromenti che vengono adoperati ne' rilevamenti topografici, ma esaminai quelli soltanto che più generalmente s' impiegarono ne' vari catasti che finora si eseguirono.

Essendo esse rivolte ad Ingegneri, Architetti e Misuratori, dovetti supporre, negli uditori e ne' lettori, la conoscenza de' primi elementi, almeno, delle matematiche, e limitare la parte puramente teorica, a quanto potesse bastare a richiamar loro alla mente le nozioni geometriche e trigonometriche indispensabili all' intelligenza delle successive operazioni di rilevamento e di calcolo.

Presentandosi raramente il caso che si abbiano, nella pratica, ad eseguire operazioni trigonometriche, credetti pregio dell'opera il corredarla di frequenti esempi numerici, acciocchè potessero gli studiosi, colla loro scorta, esercitarsi nel calcolo trigonometrico, e nell'uso delle tavole de' logaritmi.

Non discesi ne' minuti particolari delle operazioni parziali, ma esposi i soli metodi generali di rilevamento, essendo troppo facile, dopo un mediocre esercizio, il superare pressochè tutte le difficoltà che d'ordinario s'incontrano nell'eseguire simili operazioni.

Tralasciai le risoluzioni di alcune questioni planimetriche più curiose che utili, per non attenermi se non a quelle la cui applicazione sul terreno si presenta ad ogni istante in un rilevamento anche solo mediocremente esteso.

Essendo indispensabile che gli operatori del catasto siano in grado di orientare esattamente i loro piani e mappe, e che conoscano quali sono i limiti oltre i quali non è più lecito trascurare ne' calcoli la sfericità della terra, diedi alcuni brevi cenni intorno alle operazioni dell'alta geodesia, facendoli precedere dalle opportune nozioni geometriche intorno alla sfera, senza però trattare della trigono-

metria sferica, che non doveva far parte di questo insegnamento censuario.

Per rendere infine più compiuto il corso, trattai pur anche brevemente dei livelli e degli eclimetri, dei metodi di livellazione, e di quanto vi ha di più essenziale nell'altimetria.

Colla scorta delle opere de' Lacroix, Legendre, Reynaud, Cagnoli, Bordoni, Puissant, Bénoit, Lefèvre ed altri chiari Matematici e Geodeti, cercai di essere breve, senza discapito della necessaria chiarezza nella esposizione e nelle dimostrazioni, e senza nulla tralasciare di quanto è indispensabile a conoscersi nell'arte di levare i piani. Se non ho compiutamente raggiunto lo scopo che mi era proposto, ciò devesi attribuire e alla debolezza delle mie forze e al non essermi potuto dispensare dall'obbligo di pubblicare ad una ad una le Lezioni orali subito dopo di averle dette.

PIETRO MYA.

SCUOLE CENSUARIE.

NOZIONI GEOMETRICHE.

LEZIONE PRIMA.

LIVELLO A PENDOLO E A BOLLA D'ARIA SEMPLICI, SCALE GRAFICHE E VERNIERE RETTILINEO.

(letta il 17 gennaio 1854.)

Signori,

Lo scopo principale delle *Prelezioni teorico-pratiche sulla misura* si è quello di fissare la vostra attenzione sulle teorie, che possono più direttamente condurre alla risoluzione dei vari problemi di pratica applicazione, che più di frequente si presentano nella operazione censuaria. Noi faremo pertanto astrazione da ciò, che a tale oggetto possa essere estraneo.

Seguendo l'andamento tracciato dal programma ministeriale divideremo il nostro breve corso in due distinte parti:

Nella prima parte tratteremo della misura delle linee, degli angoli, e delle superficie, non che della riduzione delle figure. Passeremo a rassegna gli stromenti che più generalmente si impiegano nel rilevamento de' piani, occupandoci particolarmente del modo di verificarli e di rettificarli, e degli usi a cui ciascuno di essi può venir destinato:

Nella seconda parte esporremo le proprietà fondamentali dei *logaritmi*, e l'uso delle tavole che li comprendono; i principii geometrici delle *linee trigonometriche;* la risoluzione grafica e numerica del problema generale dei triangoli rettilinei, e delle principali questioni planimetriche; discorreremo sol di passaggio della forma della terra e delle operazioni dell'alta geodesia, per le quali si richiede la conoscenza della trigonometria sferica, di cui noi non abbiamo ad occuparci: indicheremo i modi di determinare la *meridiana* di un luogo, e di misurare l'*azimut* d'un lato; operazioni queste indispensabili all'esatto orientamento delle mappe. Infine tratteremo delle cose più essenziali spettanti alla *livellazione*.

In tutto ciò che diremo nella prima parte faremo interamente astrazione dalla forma della terra, e non impiegheremo il calcolo trigonometrico.

Se nella seconda parte poi ci occuperemo un po' diffusamente della trigonometria rettilinea, non pretenderemo con ciò di insegnarvi questo ramo delle scienze matematiche, ma solo di indicarvi la derivazione e l'uso di quelle formole, che sono indispensabili alla risoluzione dei quesiti, che si presentano assai spesso nei lavori, che devono precedere i rilevamenti parcellari nell'operazione censuaria, e ci atterremo solo alle formole più semplici, schivando quanto potrebbe richiedere l'impiego degli svolgimenti in serie delle funzioni circolari, senza però nulla ommettere di quanto possa essere necessario allo scopo a cui miriamo.

NOZIONI GEOMETRICHE.

1. **Definizione e scopo della geodesia.** — La *geodesia* è quella parte della *geometria pratica* che ha per oggetto la ricerca della forma e delle dimensioni della terra, e che insegna a rappresentare con disegni tutta o parte della di lei superficie.

Quando si vuol descrivere un tratto alquanto esteso della superficie terrestre, per esempio, uno stato, od anche una sola provincia, si richiedono, nelle operazioni e ne' calcoli, somma esattezza e considerazioni speciali, delle quali a luogo opportuno ci occuperemo Se poi non si tratta che della forma, delle accidentalità e delle divisioni di proprietà d'un tratto di superficie poco esteso, non si hanno ad applicare che principii elementari più semplici, ad eseguire calcoli meno complicati, e non si attendono dalle operazioni risultati di un'esattezza tanto rigorosa.

Da ciò risulta la divisione della geodesia in *alta geodesia*, e *geodesia elementare* o *topografia. Il rilevamento de' piani e delle mappe, l'agrimensura, la divisione delle proprietà e la livellazione* appartengono alla geodesia elementare, della quale specialmente noi dobbiamo occuparci.

Tutte le operazioni geodetiche che si eseguiscono cogli stromenti sul terreno hanno per oggetto la misura di angoli e di distanze, le quali misure, combinate fra loro per via di calcoli o di costruzioni grafiche, guidano alla ricerca di altri angoli e di altre distanze, che colle prime concorrono alla determinazione della posizione di tutti quei punti, che sono necessari alla esatta rappresentazione della parte di superficie terrestre che vuolsi rilevare.

2. **Filo a piombo, livello a pendolo e a bolla d'aria semplici.** — Alla misura delle distanze e degli angoli premetteremo le

definizioni di alcune parole che ad ogni istante ci toccherà di pronunciare, e l'esame di due stromenti semplicissimi di cui spesso nella misura delle linee, e sempre in quella degli angoli si fa uso.

Una linea od un piano diconsi *orizzontali* quando sono paralleli alla superficie delle acque stagnanti; in questo caso dicesi anche che il piano o la linea sono di *livello*. Qualunque piano non parallelo alla superficie delle acque stagnanti è un *piano inclinato:* la *differenza di livello* fra due punti è quella grandezza che indica di quanto uno di essi sia più alto o più basso dell'altro. La ricerca delle differenze di livello appartiene alla *livellazione*, della quale ci occuperemo più tardi.

Una retta od un piano perpendicolari ad un piano orizzontale diconsi *verticali*. La verticalità si riconosce o si stabilisce mediante il *filo a piombo;* l'orizzontalità mediante un *livello*.

Il filo a piombo ed il livello sono i due stromenti più semplici e più utili di cui la geodesia possa disporre, sia come mezzi di esecuzione, sia come mezzi di verificazione e di rettificazione di tutti gli altri stromenti. Il primo (fig. 1) per la sua semplicità non ha d'uopo di essere descritto, e fra tutti i livelli conosciuti citeremo ora solo quelli *a pendolo* (fig. 2) e *a bolla d'aria*, *semplici* (fig. 3), che ci dispensiamo pure dal descrivere per essere essi generalmente conosciuti.

3. **Verificazione dei predetti stromenti e rettificazione del livello a bolla d'aria.** — Il livello a pendolo si verifica nel seguente modo: si riconosce prima se l'intaglio G è precisamente sulla metà di EF (fig. 2). Si colloca poscia lo stromento sopra un regolo MN ben diritto, e se il filo a piombo non batte esattamente in G si alza uno de' capi del regolo fino a che

ciò succeda; allora lasciato il regolo in quest'ultima posizione, si fa l'inversione del livello, portando il suo piede C dove prima era quello B, e viceversa: se dopo ciò il filo a piombo batte ancora in G, il livello è esatto; se ciò non ha luogo, lo stromento è falso e va rigettato.

In un livello a bolla d'aria, deve questa rimanere nel mezzo del tubo di vetro che la contiene, quando lo stromento è collocato, in qualsivoglia direzione, su di un piano orizzontale.

Per verificare un livello a bolla d'aria, si colloca questo sopra un piano, poscia si abbassa il piano dalla parte verso cui si è portata la bolla, o si solleva dalla parte contraria, finchè la bolla venga nel mezzo del tubo che la racchiude: dopo ciò si traccia sul piano una linea lungo il regolo annesso al livello, e invertendo questo si ricolloca contro la linea in tal guisa tracciata: se la bolla ritorna nel mezzo del tubo, il livello è esatto; se ciò non ha luogo, si riconduce nel mezzo correggendo l'errore metà col variare l'inclinazione del piano su cui è collocato il livello, e metà con una delle viti che uniscono i piedi del livello al regolo.

4. Proiezioni d'un punto, d'una linea e d'una superficie su di un piano. — La *proiezione d'un punto* su di una retta o su di un piano è il piede della perpendicolare abbassata dal punto sulla retta o sul piano: così la proiezione del punto M (fig. 4) sulla retta AB è il piede P della perpendicolare MP abbassata dal punto M sulla retta.

La *proiezione d'una linea* sopra una retta è la distanza compresa fra i piedi delle perpendicolari abbassate sulla seconda dai punti estremi della prima: per esempio, PQ (fig. 5) è la proiezione della linea MN sulla retta AB.

Se dai singoli punti d'una linea o d'una superficie si

abbassano delle perpendicolari su di un piano, i piedi di tutte queste perpendicolari sul piano determinano la *proiezione della linea o della superficie* su di esso.

5. **Pianta naturale del terreno.** — Se immaginiamo al disotto d'un breve tratto della superficie terrestre un piano orizzontale, e supponiamo che da tutti i punti ragguardevoli di detta superficie discendano delle verticali sino ad incontrarlo, il complesso delle linee che uniscono i piedi delle verticali sul piano nei modi che sono fra loro uniti i punti corrispondenti del suolo, formano ciò che dicesi la *pianta naturale del terreno.*

La formazione d'un piano o d'una mappa consiste appunto nel disegnare in minori dimensioni, su di uno o più fogli, una figura simile alla pianta naturale predetta.

6. **Scale grafiche, loro costruzione e loro uso.** — Acciocchè i piani possano servire agli usi a cui vengono destinati è necessario che si conosca il rapporto esistente fra le distanze dei punti posti su di esso e le corrispondenti del terreno. Questo rapporto è ciò che dicesi la *scala* del disegno: così se le dimensioni della figura sono $\frac{1}{500}$ od $\frac{1}{1000}$ delle reali, si dirà, essere questa costrutta alla scala di 1 a 500 o di 1 a 1000.

Chiamiamo *scale grafiche* quelle linee divise in parti eguali, che si descrivono sui piani, e che servono a ridurre le dimensioni reali alla determinata ragione, o viceversa a trovare le lunghezze reali rappresentate dalle distanze dei punti posti sopra un dato piano.

Vogliasi costrurre una scala nella ragione, per esempio, di 1 a 1000: si tiri una retta indefinita *A B* (fig. 6), poscia osservando che se un metro reale rappresenta 1000 metri

della scala, un decimetro ne deve rappresentare 100, si porti su AB la lunghezza di un decimetro, e si divida in dieci parti eguali; ognuna di queste parti sarà lunga un centimetro e rappresenterà 10^m; e se finalmente si suddividerà una di queste parti, cioè la prima a sinistra, in dieci parti eguali, ciascuna di queste sarà della lunghezza di un millimetro, e rappresenterà il metro. Ciò fatto si numeri la scala mettendo il zero alla destra delle suddivisioni, e successivamente alla destra del zero 10, 20, 30, ecc. fino a 90, e poscia si notino ancora le suddivisioni alla sinistra del zero coi numeri 1, 2, 3, ecc., se la grandezza della scala lo permette, oppure scrivendo soltanto questi numeri di 2 in 2.

Vogliasi ora prendere su questa scala una lunghezza che rappresenti 74^m; si porti una delle punte di un compasso sulla divisione segnata col numero 70 e l'altra punta sulla suddivisione 4, l'apertura di compasso così determinata sarà di 74^m alla scala di 1 a 1000: viceversa se si volesse sapere la lunghezza reale rappresentata da una data retta di un piano costrntto alla detta scala, si prenderebbe un'apertura di compasso eguale a tale retta, e portando una delle due punte in un punto di divisione tale che l'altra punta venisse a cadere nella parte della scala suddivisa, si leggerebbero le decine sotto la prima punta e le unità sotto la seconda.

Se la lunghezza della retta di cui cercasi la rappresentativa sulla scala data contenesse parti frazionarie, o viceversa se cercando sulla scala la lunghezza rappresentata da una retta del piano, le punte del compasso aperto di una quantità eguale alla detta retta, non potessero cadere nello stesso tempo una sopra un punto delle divisioni, e l'altra sopra un punto delle suddivisioni, non sarebbe possibile sti-

mare con una scala costrutta come la precedente, se non ad occhio, le frazioni di una delle parti minori della scala. Volendosi escludere la stima ad occhio delle frazioni delle minime parti, invece delle precedenti scale dette *semplici*, o *delle parti eguali*, si fanno le così dette *scale ticoniche* o *delle trasversali.*

Vogliasi, per esempio, costrurre una scala ticonica nel rapporto di 1 a 2000: si prenda sopra una retta una lunghezza che rappresenti, alla scala da costruirsi, un multiplo esatto dell'unità di due ordini superiore alle minime lunghezze che la scala può dare; nel caso qui considerato si può prendere un decimetro *AB* (fig. 7), o 15 centimetri *AC*, che rappresentano 200 o 300^{m}: si divida il decimetro in due parti eguali; ciascuna di queste rappresenta 100^{m}, e suddividendo la parte a sinistra in dieci parti eguali si avrà nella lunghezza di ognuna di esse 10^{m} della scala. Ciò fatto, tirinsi parallelamente alla retta *AC* dieci altre rette a distanze eguali; nei punti *A*, *D*, *B*, *C*, si innalzino delle perpendicolari che taglino tutte le parallele, e si segnino le divisioni coi numeri 0, 100, 200, ecc., e le suddivisioni alla sinistra del zero coi numeri 10, 20, ecc.; si unisca il punto 90 delle divisioni coll'estremo punto inferiore a sinistra, *A*, con una trasversale, e dai punti 80, 70, ecc., si conducano a questa trasversale delle parallele. La trasversale che parte dal punto zero taglierà le parallele ad *AB* in modo, che le parti di queste intercette fra la perpendicolare e la medesima trasversale saranno successivamente di un decimo, di due decimi, di tre decimi, ecc., della corrispondente parte *DE* dell'infima parallela; di maniera che, se questa rappresenta 10^{m}, le dette parti delle parallele saranno di 1, 2, 3, ecc. metri. Si segnino finalmente coi numeri

1, 2, 3, ecc. i punti in cui la perpendicolare *OD* taglia le parallele.

Vogliasi ora trovare la lunghezza della retta rappresentativa della distanza, per esempio, di 237^m, alla scala di 1 a 2000. Si ponga una delle punte del compasso sul punto d'intersecazione della perpendicolare 200 e della parallela 7, poi si apra il compasso in modo che l'altra punta venga a cadere sulla trasversale 30, nel punto in cui questa trasversale taglia la parallela 7; è evidente che la distanza fra le punte del compasso così determinata sarà la lunghezza cercata. Viceversa volendosi sapere quale lunghezza reale rappresenti una retta di un disegno, si prenda un'apertura eguale alla retta data, e si porti il compasso in modo che una punta cada sopra una perpendicolare, e l'altra nel tratto della scala che contiene le trasversali; si muova poscia il compasso in modo che le due punte si trovino assieme su di una stessa parallela, senza che una di esse abbandoni la perpendicolare su cui è stata posta da principio; l'altra punta non tarderà ad incontrare un punto d'intersecazione di una trasversale con una parallela. Se la perpendicolare su cui si trova una punta è segnata 100, la parallela su cui si trovano le due punte 8, e 70 la trasversale sulla quale è posta l'altra punta, la lunghezza reale cercata sarà evidentemente di 178^m.

Da quanto si è veduto per la costruzione delle scale nelle ragioni di $\frac{1}{1000}$ e di $\frac{1}{2000}$, è facile dedurre il modo di costrurre un'altra scala qualsivoglia, la cui ragione sia espressa da una frazione avente per denominatore una sola cifra significativa seguita da uno o più zeri, ed in un modo analogo si perverrebbe alla costruzione di una scala che

avesse per denominatore un multiplo esatto di 10, di 100, di 1000, ecc.

7. **Problemi intorno alle scale.** — Chiamando D e d le misure reali di una distanza e della sua rappresentativa ad una data scala, ed $\frac{1}{n}$ la ragione di questa, si avrà da quanto si è detto $d : D :: 1 : n$, e le tre quantità che entrano in questa proporzione danno luogo ai tre seguenti quesiti:

1.° *Date* D *e* d, *trovare* n; o in altri termini, *conoscendo la lunghezza della linea che unisce due punti sul terreno, e quella della retta che la rappresenta su di un piano, trovare il denominatore della scala del piano.*

Soluzione. Dalla precedente proporzione si deduce

$$n = \frac{D}{d} ;$$

Vale a dire che *dividendo la distanza data per la sua rappresentativa, misurate entrambe colla scala naturale, si avrà il chiesto denominatore.*

Sia, per esempio, $D = 60^{m}$, $d = 0^{m},12$; sarà

$$\frac{1}{n} = \frac{0^{m},12}{60^{m}} = \frac{1}{\frac{6000}{12}} = \frac{1}{500} .$$

2.° *Conoscendo* D *ed* n *trovare* d; ossia *essendo data la misura di una distanza sul terreno, e la ragione della scala, trovare la lunghezza reale della retta che rappresenta tale distanza sul piano.*

Soluzione. Si ottiene pure dalla precedente proporzione

$$d = \frac{D}{n} .$$

Ciò che significa essere *la lunghezza reale di* d *eguale al quoziente della distanza data divisa pel denominatore dello scala.*

Essendo, ad esempio, $D = 126^m$, $n = 2000$; si avrà

$$d = \frac{126^m}{2000} = 0^m, 063 .$$

3.° *Date* n *e* d *trovare* D; cioè *conoscendo la lunghezza reale della retta che sopra un tipo rappresenta la distanza di due punti del terreno, e la ragione della scala a cui è costrutto il disegno, trovare tale distanza senza far uso della scala.*

Risoluzione. Si avrà evidentemente $D = dn$; ciò che indica *essere la distanza cercata eguale al prodotto della lunghezza reale della retta che la rappresenta sul piano pel denominatore della scala.*

Se, per esempio, si avesse $d = 0^m, 15$, $n = 1000$, sarebbe $D = 0^m, 15 \times 1000 = 150^m$.

Si potrebbe finalmente proporre di *trovare la ragione della scala che ha servito alla costruzione d'una mappa, essendo data l'area di una pezza di terreno disegnata su di essa mappa, e la mappa stessa.*

Risoluzione. Si misuri colla scala naturale la superficie della figura rappresentante la detta pezza, e sieno A ed a l'area data e quella trovata; si avrà

$$\frac{1}{n} = \sqrt{\frac{a}{A}} = \sqrt{\frac{1}{\frac{A}{a}}} .$$

Infatti la geometria insegna essere

$$\frac{a}{A}=\frac{d^2}{D^2}, \text{ ora } \frac{d}{D}=\frac{1}{n}, \text{ dunque } \frac{1}{n}=\frac{d}{D}=\sqrt{\frac{a}{A}}.$$

Si dovrà dunque *dividere l'area della pezza data per quella della figura che la rappresenta, e nella radice quadrata di questo quoziente si avrà il denominatore della scala.*

8. **Verniere rettilineo.** — A rendere sensibili le minime suddivisioni di una retta senza segnarle sulla medesima, e senza far uso delle trasversali, si ricorre al *verniere rettilineo.* È il verniere rettilineo un breve tratto di retta, che potendo scorrere longitudinalmente sopra di un'altra già divisa in parti eguali, è esso pure diviso in modo tale, che si può tener conto delle frazioni delle infime parti in cui è divisa la retta su cui scorre.

Sia *AB* (fig. 8) una retta divisa in parti eguali, e vogliasi costrurre un verniere mediante il quale si possa tener conto delle frazioni delle parti in cui essa è divisa, senza che si commettano nella stima errori che giungano ad un decimo di dette parti. Si prenda una lunghezza *CD* corrispondente a 9 parti di *AB*, e si divida in 10 parti eguali; ognuna di queste parti sarà li $\frac{9}{10}$ di una delle prime, e la differenza fra una delle parti in cui è divisa *AB* ed una di quelle in cui è divisa *CD* sarà $1-\frac{9}{10}=\frac{1}{10}$ di una parte di *AB*.

Ora supponiamo che il verniere *CD* scorra lungo la retta *AB*; quando la prima divisione del verniere coinciderà colla prima divisione della retta, è evidente che il verniere avrà percorso il decimo della lunghezza di una delle parti in cui *AB* è divisa; e se queste parti rappresentano tanti metri,

la strada percorsa dal verniere rappresenterà $0^m,1$: quando la 2.ª divisione del verniere coinciderà colla 2.ª di *AB*, avrà il verniere percorso $0^m,2$; avrà percorso $0^m,3$ allorchè la 3.ª sua divisione corrisponderà colla 3.ª di *AB*, ecc.

Ciò posto si applichi una retta, della quale si cerca la misura, contro la *AB* (fig. 8), con un suo estremo in *A*, e si faccia scorrere il verniere *CD* lungo la *AB* finchè il zero del verniere coincida coll'altro estremo della retta da misurarsi; se questo zero corrisponde esattamente ad una delle divisioni di *AB*, la misura cercata sarà di un numero intero di unità; ma se il zero non coincide con una delle predette divisioni, e trovasi compreso, per esempio, fra la 42.ª e la 43.ª, si percorrano coll'occhio le divisioni del verniere, osservando quale di queste divisioni coincida con una delle prime, e sia per esempio la 5.ª, è chiaro che in questo caso la lunghezza cercata sarà di $42^m,5$, e se la coincidenza è perfetta, la misura è, non solo approssimata, ma esatta: potrà però accadere, che nessuna delle divisioni del verniere coincida perfettamente con una delle divisioni di *AB*, e che due delle prime sieno comprese fra due delle seconde; allora essendo, per esempio, la 5.ª e la 6.ª in questo caso, è evidente che la retta sarà maggiore di $42^m,5$ e minore di $42^m,6$, ed assumendo per la misura cercata la media fra queste due, si conchiuderà essere essa di $42^m,55$, con un errore minore di un mezzo decimetro.

In egual modo se si avesse un regolo graduato, e che le infime sue divisioni fossero ciascuna di un centimetro; se si volesse il valore di una frazione esatto fino al decimo di centimetro, ossia fino al millimetro, si farebbe la lunghezza del verniere di nove centimetri, e questa lunghezza si dividerebbe in 10 parti eguali.

In generale sia l'infima divisione della scala data $\frac{1}{n^{mo}}$ dell'unità principale, e vogliasi ottenere una frazione che sia $\frac{1}{p^{mo}}$ di $\frac{1}{n^{mo}}$, ossia $\frac{1}{np^{mo}}$ dell'unità; *si prendano* p — 1 *divisioni della scala, e si dividano in* p *parti eguali*, ciascuna di queste risulterà eguale a $\frac{p-1}{p} \times \frac{1}{n} = \frac{p-1}{np}$, e si avrà

$$\frac{1}{n} - \frac{p-1}{np} = \frac{1}{np}.$$

Se si avesse una scala la cui infima divisione fosse $\frac{1}{72}$ dell'unità principale, e che il suo verniere abbracciasse 11 di queste divisioni, facendo nella formola precedente $n = 72$, $p = 12$, si troverebbe

$$\frac{1}{72} - \frac{11}{864} = \frac{1}{864};$$

vale a dire che con tale verniere si stimerebbero le distanze con errori minori di $\frac{1}{864}$ dell'unità.



LEZIONE SECONDA.

ALLINEAMENTI.
MISURA DELLE DISTANZE COLLE CANNE METRICHE,
COLLA CATENA METRICA E COLLA STADIA.

(letta il 20 gennaio 1854.)

Signori,

Dopo d'avervi ricordato nella prima lezione quali sieno gli stromenti, coi quali si riconosce o si determina l'orizzontalità e la verticalità delle linee, di avervi rammentato le definizioni delle parole, che più di frequente debbonsi pronunciare nel parlare di cose spettanti alla geodesia, e di avervi richiamato alla mente la costruzione e l'uso delle scale grafiche che servono di passaggio dalle distanze dei punti del terreno alle loro rappresentative sulla carta, e viceversa; ci occuperemo in questa ed in alcune delle susseguenti lezioni intorno ai modi di raccogliere sul terreno i dati necessari alla costruzione del piano che lo deve rappresentare. Già vi ho accennato consistere questi dati in misure di distanze e di angoli:

Incominceremo dalla misura delle distanze, non occupandoci per ora, che delle misure ordinarie che si prendono sul terreno colle canne metriche, colla catena metrica e colla stadia nei rilevamenti parziali.

9. **Paline.** — Prima di porsi a misurare la distanza che separa due punti del terreno, conviene segnare sul terreno medesimo la via più breve che conduce dall'uno all'altro punto, onde non esporsi al pericolo di piegare ora a destra, ora a sinistra della linea da percorrersi nella misura.

A segnare linee sul terreno si adoperano le così dette *paline* (fig. 9). Oltre al tracciamento degli *allineamenti*, servono le paline ad individuare o segnare i punti del terreno che si vogliono rilevare, col piantarne verticalmente una ad ognuno di essi. Piantata una palina, se ne riconosce la verticalità col filo a piombo.

10. **Allineamenti.** — Per segnare un allineamento sul terreno in una direzione arbitraria, si pianta una palina nel punto di partenza *A* (fig. 10) ed una seconda in un altro punto *C*, poscia camminando indietro, con una palina pendente da una mano, nella direzione determinata dalle due paline *A*, *C*, si conficca verticalmente nel suolo una terza palina *D*, osservando, che la visuale che passa per quest'ultima, e per quella *C* vada pure a ferire la prima palina *A*, e si continua in tal modo, finchè sia compiuto l'allineamento: se le paline hanno i loro fusti ben diritti, sarà meglio che la visuale vada radendo a destra ed a sinistra i fusti delle paline, diversamente basterà che passi pei punti di mezzo delle mire collocate sulle loro cime: i piani delle mire devono disporsi perpendicolarmente alla visuale, e gli assi geometrici delle paline devono determinare un piano verticale, la cui intersecazione col terreno sarà una linea qualunque, ma la proiezione di questa su di un piano orizzontale sarà sempre una retta.

Generalmente la direzione dell'allineamento da segnarsi è determinato da due punti del terreno; allora essendo due

gli operatori, quello che dirige l'operazione, dopo di aver fatto piantare una palina in ciascuno dei due punti dati *A* e *B* (fig. 10), stando in *A* fa avanzare con una palina pendente da una mano l'altro operatore fra *A* e *B* verso il sito, in cui vuole che si collochi una nuova palina, e con cenni della mano lo fa declinare ora a destra ora a sinistra finchè la visuale, che il primo fa passare per *A* e *B*, venga pure a ferire quella che il secondo lascia pendere da una mano, ed allora con altro cenno fa conficcare la palina verticalmente nel suolo: piantata questa terza palina il secondo operatore può continuare da sè l'allineamento fino al suo termine.

È facile vedere come potrebbe anche in questo caso tracciare l'allineamento un solo operatore, incominciando a piantare tre paline, una in *A*, una in *B* e l'altra in *F* al di là del punto estremo *B*, onde potersi quindi collocare in *E* sulla direzione determinata dalle paline *F* e *B*.

Se i punti estremi *A* e *B* (fig. 11) dell'allineamento fossero inaccessibili, uno degli operatori, collocandosi in un punto qualunque *C* del terreno, guiderebbe con cenni della mano il secondo operatore in un punto *D* nella direzione *CA*; questi farebbe nello stesso modo declinare l'altro, finchè la visuale diretta da *D* in *B* passasse per la palina che il primo tiene pendente da un mano, giunto il primo operatore in *E* farebbe venire il secondo in *F* nella direzione *EA*, e quindi si recherebbe esso stesso in *G*; non tarderebbero in tal modo a porre le loro paline sulla linea *AB*.

Se si trattasse di segnare il punto in cui due allineamenti *AB* e *CD* (fig. 12) si intersecano, uno degli operatori si collocherebbe dietro una delle paline *A* piantate lungo il primo allineamento, ed attenderebbe che la palina che l'altro operatore porta pendente da una mano, mentre cammina

sul secondo allineamento, venisse a trovarsi in E nella visuale diretta da A verso B, ed allora con un cenno gliela farebbe ivi conficcare verticalmente nel suolo.

Quando avremo parlato della misura delle distauze ritorneremo ad occuparci degli allineamenti risolvendo la questione del prolungamento d'una retta al di là d'un ostacolo; frattanto vediamo come si misurino le distanze adoperando le *canne metriche*, oppure la *catena metrica*.

11. **Misura delle distanze.** — Per eseguire comodamente una misura colle canne, si richiedono due canne metriche d'eguale lunghezza.

Onde misurare una distanza colle canne, il canneggiatore ne prende una per un capo colla mano destra, e collocandosi presso a poco sulla retta che deve misurare; ne abbassa l'altro capo sulla stessa retta dirigendosi col mezzo delle paline piantate lungo la medesima, e quindi trae indietro la canna tanto, che il capo che tiene in mano venga a toccare il punto da cui deve cominciare la misura; poi camminando lungo la canna che ha lasciata in terra alla sua destra, prende un capo della seconda canna, e pervenuto all'estremo della prima, colloca la canna che tiene in mano come ha collocata l'altra, facendo sì che i due estremi delle canne si tocchino leggermente; dà quindi di piglio al capo più vicino della prima canna, e la solleva gridando, *uno*, e camminando lungo la seconda canna, fa scorrere quella che tiene in mano fino al capo opposto; a suo tempo la colloca dopo la seconda, e prendendo questa, grida, *due*, e continua in tal modo fino al termine della linea da misurarsi, avvertendo di non gridare il numero delle canne prima d'aver afferrato l'ultima onde non confondersi nel contare.

Se il terreno è orizzontale, od anche leggermente inclinato o ondulato, non occorre alcuna precauzione nel disporre le canne successivamente l'una dopo l'altra, ma se è alquanto inclinato o fortemente ondulato, non solo si deve badare a camminare in linea retta, ma conviene pur anche disporre ciascuna canna orizzontalmente rialzandone il capo più basso fino a che si trovi allo stesso livello dell'altro, ciò che si riconosce mediante un filo a piombo, che facendo un angolo retto colla canna, tocchi l'estremità di questa, e cada sul suolo nel punto in cui deve trovarsi un estremo della canna attigua. Le canne si dispongono però generalmente orizzontali senza l'aiuto del filo a piombo e della squadra, servendosi di una delle due canne per segnare la verticale all'estremità dell'altra, che disponsi orizzontale semplicemente ad occhio. Coll'esercizio si giugne a non commettere errori sensibili nell'eseguire tali operazioni, che supponiamo non tendenti ad ottenere risultati di somma esattezza.

Per misurare una distanza colla catena metrica si richiedono due operatori, i quali portano con sè, oltre la catena, un certo numero di piuoli o cavicchi di ferro, d'ordinario 10. I due operatori impugnano ciascuno una maniglia della catena, quello che dirige l'operazione, rimette tutti i piuoli all'altro, e dopo d'aver messo l'estremo della catena contro il punto da cui deve cominciare la misura, con cenni della mano fa che l'altro venga sulla retta da misurarsi; questi quando ha ben tesa la catena orizzontalmente, inserisce un piuolo nella maniglia e lo conficca nel suolo, dopo di ciò si alzano, e partono tutti e due trasportando la catena lungo la retta che misurano. Quando il primo è giunto presso il piuolo piantato dal secondo, si abbassa e mette l'estremo della catena che tiene in mano contro questo piuolo, l'altro

si abbassa nello stesso tempo, e ne conficca nel terreno un secondo, e continuano così, finchè quello che cammina avanti abbia piantato tutti i piuoli che gli erano stati rimessi prima d'incominciare la misura. Allorchè il primo operatore sarà giunto all'ultimo piuolo, il secondo dopo di avere distesa la catena la abbandona, viene a ritirare dall'altro tutti i piuoli, e questi tien nota di tale consegna. Giunti al termine della linea, per conoscere il numero dei metri compresi nella linea che si è misurata, si moltiplica il numero dei piuoli pel numero di volte che il primo operatore li riconsegnò tutti al secondo, ed a questo prodotto si aggiugne il numero dei piuoli che il primo ha ritirati dopo l'ultima consegna, questa somma si moltiplica per la lunghezza della catena, ed al nuovo prodotto si aggiugne la parte di essa che manca a compiere la misura.

Sia, per esempio, di 10^m la lunghezza della catena, 10 il numero de' piuoli, 7 il numero delle consegne, 3 il numero de' piuoli che il primo operatore ha ritirati dopo l'ultima consegna, ed $8^m 25$ la frazione rimanente della catena: la distanza cercata sarà

$$(7\times 10+3)\times 10^m+8,^m 25=738^m 25\ .$$

Riesce al certo più spedita la misura delle distanze colla catena che non colle canne, finchè il terreno è piano o leggermente ondulato; in ogni caso però risulta meno esatta per la difficoltà di tendere sempre bene ed egualmente la catena.

12. **Stadia.** — Il tempo che si richiede nella misura delle rette, sia colle canne, sia colle catene, specialmente ove debbasene misurare un numero ragguardevole, ciò che sempre accade nei rilevamenti di dettaglio, e le difficoltà ca-

gionate dagli ostacoli che si frappongono bene spesso ai punti, dei quali si cercano le distanze, come i fossi, i burroni, le paludi e simili, fecero immaginare varii mezzi, onde trovare le distanze senza effettivamente misurarle. Fra questi mezzi il più in uso è *la stadia* che ora descriveremo.

Siavi (fig. 13) un ordinario cannocchiale composto di un obbiettivo O ed un oculare o munito di una *reticola*, o *micrometro* al foco dell'obbiettivo, composta di tre fili fra loro paralleli a', b', e d' disposti in modo, che i due a' e b' sieno equidistanti da quel di mezzo d'. Se si dispone il cannocchiale in modo, che il suo asse ottico sia orizzontale ed orizzontali pure i tre fili del micrometro, e si traguarda per esso un oggetto posto in distanza, ad esempio, un'asta verticale, se ne vedrà al foco predetto l'immagine intersecata dai due fili estremi a' e b' in a e b. Ora i fasci luminosi che partono dai punti A e B corrispondenti ai punti a e b dell'immagine, vengono ad intersecarsi nel centro ottico dell'obbiettivo, e continuando il loro cammino in linea retta, determinano due triangoli isosceli AOB, aOb, con un angolo O opposto al vertice, epperciò simili, aventi per basi, uno la parte AB dell'asta, l'altro la sua immagine ab, e per altezze, il primo la distanza OD dall'obbiettivo all'asta, il secondo la distanza focale Od; si potrà dunque stabilire la seguente proporzione.

$$ab:AB::Od:OD\ ;$$

ovvero facendo per brevità $ab=h$, $AB=H$, $Od=d$, $OD=D$,

$$h:H::d:D=\frac{H}{h}d\ . \qquad (1)$$

In quest'equazione essendo costanti le quantità h e d, se si daranno a D, i valori successivi D', $2D'$, $3D'\ldots\frac{D'}{2}$, $\frac{D'}{3}$ ecc. H prenderà i valori proporzionali

$$H',\ 2H',\ 3H'\ldots\frac{H'}{2},\ \frac{H'}{3},\ \text{ecc.}$$

voglio dire, che se si trasporta l'asta ad una distanza doppia della prima, si scoprirà tra i fili a e b una parte di essa doppia di quella che si era scoperto la prima volta; se ne scoprirà la metà, se si porta ad una distanza che sia la metà della prima ecc.

Epperciò essendo l'asta divisa in parti uguali, e supponendo, che per una data distanza si sappia quante unità si leggano fra i fili del micrometro sull'asta medesima, sarà sempre possibile conchiudere per un'altra lettura diversa dalla prima, e mediante una semplice proporzione, a quale altra distanza si trovi l'asta dall'obbiettivo del cannocchiale.

Ad evitare i calcoli che si dovrebbero stabilire per ogni nuova distanza, si opera nel seguente modo: si prende un'asta imbianchita e si porta ad una distanza conosciuta, per esempio, a 200^m dall'obbiettivo, ed ivi disposta verticalmente, si segnano su di essa due lineette che indichino le apparenti intersecazioni dei fili a e b, osservate a tale distanza, e si divide lo spazio compreso in 200 parti eguali, protraendo la graduazione oltre le due lineette per tutta la lunghezza dell'asta (fig. 14); con un'asta così divisa e col cannocchiale che ha servito a dividerla, si otterranno le distanze mediante la semplice lettura.

La stadia fin qui descritta ha i fili del micrometro fissi; essa ha l'inconveniente di costringere ad impiegare sempre la stessa asta col medesimo cannocchiale; se per caso si

rompono i fili della reticola, bisogna di nuovo graduare l'asta. Quest'inconveniente non ha più luogo colla mobilità dei fili *a* e *b*, i quali possono, mediante un apposito congegno, avvicinarsi od allontanarsi dal filo di mezzo di quantità eguali. Prima di porsi in campagna si misura una distanza ordinariamente di 200^m, si porta ad un estremo l'asta già graduata, e si dispone all'altro estremo il cannocchiale orizzontalmente; si muovono poscia i due fili *a* e *b*, finchè si leggano dall'uno all'altro duecento divisioni. Adoprando un cannocchiale munito di micrometro mobile, di tanto in tanto conviene verificare e all'uopo rettificare la distanza dei fili.

Il precedente modo di graduare l'asta, che è pur quello generalmente seguito, è difettoso, per essersi supposta invariabile la situazione dell'immagine d'un oggetto posto a qualsiasi distanza, mentre l'ottica insegna, che questa immagine si allontana dalla lente a misura che l'oggetto se le avvicina dalla parte opposta, e si accosta al contrario alla lente quanto più l'oggetto se le allontana, e se si suppone un punto luminoso posto ad una distanza indefinita, la sua immagine viene a formarsi in un punto, detto perciò *foco principale*, e la distanza di questo punto dalla superficie esterna della lente chiamasi *distanza focale principale*. Ora, a ben intendere ciò che sto per dire, è necessario sapere che fra la distanza focale principale, che chiameremo F, e quella d corrispondente ad una distanza finita D, bavvi la seguente relazione:

$$\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D}\;\cdots\cdots \qquad (2),$$

dalla quale si deduce $d=\frac{DF}{D-F}$; portando questo va-

lore di d nell'equazione

$$D=\frac{d}{h}\times H\ ,$$

togliendo il fattore comune e ricavando nuovamente il valore di D, si troverà finalmente

$$D=\frac{FH}{h}+F\ \ldots\ldots \qquad (3)$$

Onde fissare le idee, abbiasi un cannocchiale la cui distanza focale sia $F=0^{m},25$, e la distanza dei fili $h=0^{m},005$; sostituendo nell'equazione (3), alle lettere F ed h, questi valori, essa diverrà

$$D=50H+0^{m},25\ . \qquad (4)$$

Ciò vuol dire, che con tale cannocchiale la distanza dell'asta dall'obbiettivo è sempre eguale a 50 volte la lunghezza della parte dell'asta che si scorge fra i due fili del micrometro, più $0^{m},25$.

Ciò posto, si divida un'asta in doppi centimetri, od in centimetri, cioè in parti che sieno il cinquantesimo, od il centesimo dell'unità metrica, ciascuna di tali divisioni rappresenterà un metro o un mezzo metro, e se l'asta si troverà ad una distanza tale che sopra di essa si leggano, per esempio, 125 centimetri, essa sarà lontana dall'obbiettivo di una quantità

$$D=50\times 1^{m},25+0^{m},25=62^{m},75\ .$$

Conchiudiamo che, in generale, si deve cercare l'esatto rapporto tra la distanza focale e quella dei fili, dividere la lunghezza del metro sull'asta in tante parti eguali quante

sono le unità contenute in tale rapporto, o nel doppio, se possibile; ciascuna di esse parti rappresenterà un metro o mezzo metro, e ad ogni lettura si dovrà aggiungere la distanza focale, onde avere la vera distanza cercata.

Ora cerchiamo quale sia l'errore cagionato nella stima delle distanze dalla prima maniera di graduare l'asta: si abbia sempre lo stesso cannocchiale fin qui descritto, e suppongasi l'asta portata a 200^m di distanza dall'obbiettivo, onde dividere la parte di essa che si scopre fra i fili in 200 parti.

Facendo $D=200^m$ nell'equazione (4) si avrà

$$200^m=50\,H+0^m{,}25\ ;$$

d'onde si deduce

$$H=\frac{200^m-0^m{,}25}{50}=\frac{199^m{,}75}{50}=3^m{,}995\ .$$

Vale a dire, che alla distanza di 200 metri dal cannocchiale, si scoprirà una parte dell'asta di $3^m{,}995$ di lunghezza; ognuna delle parti ottenute col primo metodo sarebbe adunque eguale a $\frac{3^m{,}995}{200}=0^m{,}019975$, mentrechè sulla stadia divisa col secondo metodo si leggerebbe 199,75 parti, ciascuna di $0^m{,}02$.

Ora si supponga trasportata l'asta a 50^m di distanza; facendo nell'equazione (4) $D=50$, troviamo $H=0^m{,}995$. Ma siccome la stadia è stata divisa col primo metodo in parti di $0^m{,}019975$ ciascuna, se ne vedrà di queste parti $\frac{0{,}995}{0{,}019975}=\frac{995000}{19975}=49{,}81$, e si leggerà sulla stadia $49^m{,}81$ circa, commettendo così un errore di $0^m{,}19$; errore in verità non tanto ragguardevole, ma che in molte cir-

costanze non può trascurarsi; tanto più che nell'adoperare la stadia questo errore non è il solo che ordinariamente si faccia, come diremo in seguito.

Chi volesse cercare l'errore per 20^m di distanza, come si è trovato quello per 50^m, troverebbe essere questo in tal caso di $0^m,23$. Conchiudiamo essere tale errore tanto più grande, quanto maggiore è la differenza fra la distanza che si vuole stimare, e quella che ha servito a graduare l'asta.

Variando, come si è notato, il sito del foco dell'obbiettivo col variare delle distanze degli oggetti osservati, è necessario che la reticola sia suscettibile di un leggiero traslocamento lungo il tubo del cannocchiale, onde collocarla esattamente ove si forma l'immagine, perchè, senza di ciò, per poco che si muova l'occhio, si mettono i fili apparentemente in moto rispetto alla detta immagine, e aumenta o diminuisce l'altezza della parte della medesima compresa fra i fili, avvicinando od allontanando l'occhio dall'oculare, cosicchè riesce incerta la lettura, e possono risultarne degli errori notevoli nella stima delle distanze: tale apparente instabilità nei fili, dicesi la *parallasse dei fili.* Il traslocamento della reticola va accompagnato da quello dell'oculare, altrimenti non si scoprirebbero più i fili con sufficiente nettezza.



LEZIONE TERZA.

SCALE DI RIDUZIONE ALL'ORIZZONTE. QUESTIONI RISOLTE COL SOLO SEGNARE E MISURARE LINEE RETTE SUL TERRENO.

(letta il 24 gennaio 1851.)

Signori,

Abbiamo, nella scorsa lezione, dalla proporzione,

$$h : H :: d : D,$$

nella quale supponevamo h e d costanti, e solo variabili H e D, dedotto il metodo generalmente seguito nel dividere l'asta. Ma la relazione $\frac{1}{F}=\frac{1}{d}+\frac{1}{D}$, fornitaci dall'ottica, ci ha dimostrato non essere d costante, e non essere per conseguenza rigorosamente esatto quel primo metodo di divisione.

Ricavando dalla predetta relazione il valore di d e sostituendolo nella proporzione, fummo finalmente condotti all'equazione

$$D=\frac{F}{h}H+F \qquad (3);$$

dalla quale risulta doversi dividere la lunghezza del metro sull'asta in tante parti eguali quante sono le unità nel rap-

porto $\frac{F}{h}$, e doversi poscia aggiugnere alla lettura, nello stimare le distanze, la quantità costante F.

Ora vediamo come si possa trovare questo rapporto $\frac{F}{h}$ senza effettivamente misurare F ed h.

A quest'uopo si disponga il cannocchiale col suo asse perfettamente orizzontale; si collochi un'asta imbianchita, verticalmente, ad una distanza, che chiameremo D, dall'obbiettivo, misurata esattamente sopra un terreno ben piano, e presso a poco orizzontale, e dopo di aver tolta affatto la parallasse de' fili, si facciano segnare sull'asta due lineette che indichino le intersecazioni apparenti de' fili a tale distanza, e si misuri con tutta la possibile precisione la parte dell'asta compresa fra le due lineette; questa parte dell'asta corrisponde ad H.

Si ripeta simile operazione per un'altra distanza D', per la quale si avrà

$$D' = \frac{F}{h} H' + F .$$

Se ora si sottrae quest'ultima equazione da quella (3), si avrà

$$D - D' = \frac{F}{h}(H - H') ,$$

e finalmente $$\frac{F}{h} = \frac{D - D'}{H - H'} .$$

Vale a dire, *che il rapporto della distanza focale principale* F, *a quella de' fili* h, *è eguale al rapporto della diffe-*

renza fra le due distanze misurate sul terreno, a quella delle parti dell'asta scoperte tra i fili a tali distanze.

Siasi trovato, per esempio, $D=200^m$, $D'=50^m$, $H=3^m,995$ ed $H'=0^m,995$; sarà

$$\frac{F}{h}=\frac{200-50}{3,995-0,995}=\frac{150}{3}=50\ .$$

Sia ancora per un altro cannocchiale, $D=190$, $D'=76$, $H=1^m,996$ ed $H'=0^m,796$; si troverebbe

$$\frac{F}{h}=\frac{190-76}{1,996-0,796}=\frac{114}{1,2}=95\ ,$$

e si conchiuderebbe doversi in questo caso dividere il metro sull'asta in 95 parti eguali, che rappresenterebbero ciascuna un metro.

Oltre il rapporto $\frac{F}{h}$, è però necessario di conoscere F, almeno approssimativamente, ciò che si ottiene assai facilmente misurando, sul cannocchiale, la distanza dall'obbiettivo al micrometro.

13. Scale di riduzione. — Nello esporvi la teoria e l'uso della stadia, abbiamo finora sempre supposto, che nel leggere le distanze, l'asse del cannocchiale fosse disposto orizzontalmente; una leggera inclinazione dell'asse non cagionerebbe al certo errori ragguardevoli nella misura; ma se per leggere sull'asta si deve disporre il cannocchiale in modo che il suo asse faccia un angolo sensibile coll'orizzonte, si deve allora correggere la distanza risultante dalla lettura, cercando, invece di questa distanza, la sua proiezione

orizzontale, di cui solo si deve tener conto nel rilevamen.o de' piani.

Ad ottenere la proiezione orizzontale di una distanza letta sull'asta mentre il cannocchiale ha una posizione inclinata, si richiede, oltre alla lettura più volte accennata, che si conosca l'angolo fatto coll'orizzonte dall'asse del canuocchiale; quest'angolo viene ordinariamente indicato sopra un settore circolare saldamente unito alla colonna che sostiene il cannocchiale, da un verniere curvilineo, che movendosi col cannocchiale, segna zero quando l'asse di questo è orizzontale.

Della misura degli angoli, epperciò anche del verniere curvilineo, tratteremo nella prossima lezione; intanto onde non lasciare incompiuta la teoria della stadia, supporremo per un momento di aver già parlato di questa misura.

Sia AB (fig. 15) la linea di cui si cerca la proiezione orizzontale, BC questa proiezione: nel triangolo ABC rettangolo in C conoscendo l'ipotenusa AB, e l'angolo ABC, è facile trovare il lato BC, o costruendo graficamente il triangolo stesso, o mediante il calcolo, operazioni queste delle quali dovremo a luogo opportuno occuparci.

Frattanto osserviamo che ad evitare la costruzione di un triangolo per ogni riduzione all'orizzonte, che possa occorrere di dover eseguire, basta operare nel seguente modo: si segni una serie di linee rette, le quali facciano con una retta OA (fig. 16), supposta orizzontale, tutti gli angoli compresi da uno fino a novanta gradi; se su ciascuna di esse prendiamo le parti eguali OM, OM', OM'', ecc., e dai punti M, M', M'', ecc., abbassiamo sulla OA le perpendicolari MP, MP', MP'', ecc., otterremo le proiezioni OP, OP', OP'', ecc., della lunghezza OM, per tutti i gradi d'inclinazione; se poscia ripetiamo per un'altra

distanza *ON*, ciò che abbiam fatto per quella *OM*, otterremo anche tutte le proiezioni di questa, e così di qualsivoglia altra distanza.

Su questo principio è fondata la costruzione delle *scale di riduzione all'orizzonte*, che si tracciano come ora diremo: si faccia una scala ticonica ordinaria (fig. 17), e si descriva, con un raggio *OA*, un quarto di circolo *AB*, il cui centro *O* sia nell'angolo superiore a sinistra della scala; si divida il quadrante in 90 parti eguali, e si conducano dal centro *O* i raggi a tutti i punti di divisione così determinati. Non è necessario di conservare tutto intero il quadrante sulla scala, ma tagliando i raggi con una parallela *ED* alla lunghezza della medesima, si scrivano su di essa i gradi di 5 in 5 come scorgesi dalla figura.

L'uso delle scale di riduzione non può dare che una mediocre approssimazione, massime che per leggere la vera distanza da ridursi all'orizzonte devesi inclinare l'asta perpendicolarmente al prolungamento dell'asse del cannocchiale, ciò che non si può mai effettuare con precisione, oppure, lasciando l'asta verticale, si deve ripetere sulla scala due volte la riduzione, come fra breve diremo.

Per servirsi di questa scala si opera come segue: siasi letto sulla stadia, inclinata come abbiam detto, 175^m, e sull'arco che dà le inclinazioni dell'asse del cannocchiale, $25°$: si apra il compasso in modo che le sue punte abbraccino sulla scala la lunghezza di 175^m, e si porti quest'apertura sulla linea *O* — 25; ponendo una punta in *O*, l'altra cadrà in *m*; si chiuda poscia il compasso tanto, che con una punta facendo centro in *m*, l'arco descritto coll'altra punta sia tangente in *n* al lato *O* — 100 della scala: la lunghezza *mn* sarà la proiezione orizzontale di quella di 175^m, incli-

nata di 25° all'orizzonte, alla scala data. La retta *mp* perpendicolare al lato *OA* della scala sarebbe la differenza di livello fra gli estremi della distanza misurata colla stadia, come è facile riconoscere confrontando il triangolo *mOp* col suo simile *ABC* (fig. 15).

Se nel leggere sull'asta si fosse mantenuta questa nella posizione verticale, dopo di aver portata la distanza letta da *O* in *m* (fig. 17), e di aver trovata la lunghezza *mn*, si riporterebbe ancora quest'ultima apertura di compasso da *O* in *m'*, ed operando come si è fatto per trovare *mn*, si avrebbe in *m'n'* la rappresentativa della proiezione orizzontale cercata. Si vedrà più tardi per qual ragione si debba procedere come ora abbiamo indicato.

Gli errori che possono risultare e dal modo di dividere l'asta, e dall'uso delle scale di riduzione, e dall'imperfetta correzione della parallasse de' fili, e dall'eccesso o dal difetto di luce nel tempo in cui si fanno le osservazioni, e dal dover stimare ad occhio le frazioni dell'unità, e da altre circostanze che sarebbe lungo enumerare, tutti questi errori, dico, quantunque considerati ad uno ad uno non sieno ordinariamente ragguardevoli, e che possano anche spesso compensarsi, possono pur anche, accumulandosi, divenir tali da non potersi più trascurare; laonde se utilissima è la stadia nei rilevamenti fatti ad una scala, per esempio, di $\frac{1}{10000}$, od anche di $\frac{1}{5000}$, non si può più dire lo stesso allorchè si fa uso di scale nel rapporto di $\frac{1}{1000}$, o di $\frac{1}{2000}$, ed in questi casi sarà sempre preferibile la misura diretta.

14. **Questioni risolte col solo segnare e misurare linee rette sul terreno.** — 1.ª *Prolungare una retta* AB *al di là di un ostacolo* X (fig. 18).

Soluzione. Si scelga sul terreno un punto O, da cui si scorgano due punti A e B dell'allineamento che si vuol prolungare, i quali punti però non sieno troppo fra loro vicini, e che si possa, stando in O, vedere dalla parte dell'ostacolo X opposta a quella in cui giace la porzione AB della retta da prolungarsi; poscia si segnino le palinate OA, ed OB, e si dividano in parti proporzionali con due paline piantate una in M, e l'altra in N, e si prolunghi indefinitamente la MN nel senso del prolungamento da effettuarsi: da O si facciano partire due linee OC, OD, e su queste si segnino i punti P e Q, in cui vengono tagliate dalla MN prolungata, e finalmente si determinino le distanze OC ed OD colle proporzioni

$$OM:OA::OP:OC=\frac{OP\times OA}{OM},$$

$$OM:OA::OQ:OD=\frac{OQ\times OA}{OM}:$$

i punti C e D saranno evidentemente sul prolungamento di AB.

Osservazione. Le parti OM ed ON non vanno prese tanto brevi, rispetto alle OA ed OB, perchè se, per esempio, si facessero eguali ad $\frac{1}{3}OA$, ed $\frac{1}{3}OB$, risultando allora $OC=3OP$, ed $OD=3OQ$, se si commettesse un piccolo errore nella misura di OP, od in quella di OQ, triplicandosi questo errore potrebbe far deviare la retta CD,

e più non si troverebbe questa, in tal caso, sul prolungamento di AB.

2.ª *Segnare una retta fra due punti* A *e* D (fig. 18), *non essendo possibile, a chi sta in uno di essi, di veder l'altro.*

Soluzione. Scelto sul terreno un punto D, come precedentemente, e posta una palina in M, ed un'altra in Q, in modo che vi sia la proporzione

$$OM : OA :: OQ : OD,$$

si segnino gli allineamenti OB ed OC, e le intersecazioni N e P di queste due rette con quella MQ, e si facciano finalmente le lunghezze OB ed OC eguali ai qnarti termini delle seguenti proporzioni,

$$OM : OA :: ON : OB = \frac{ON \times OA}{OM},$$

$$OM : OA :: OP : OC = \frac{OP \times OA}{OM}:$$

i punti B e C si troveranno evidentemente sulla retta che unisce i due punti A e D.

Osservazione. Quanto si è detto nell'osservazione precedente è pure applicabile alla risoluzione di questa seconda questione.

3.ª *Condurre per un punto* M (fig. 19) *una parallela ad una retta data* AD *accessibile.*

Soluzione. Si scelga sul terreno un punto O, e si segni sulla retta data un punto A all'intersecazione di questa col prolungamento della OM; si misuri OM, OA, ed una seconda retta OD compresa fra il punto O, e la retta a cui

devesi condurre la parallela; si faccia poscia OQ eguale al quarto termine della seguente proporzione,

$$OA:OM::OD:OQ=\frac{OM\times OD}{OA};$$

la retta che unisce i punti M e Q, dividendo i lati OA e OD del triangolo OAD in parti proporzionali, è parallela alla retta data OD.

4.ª *Trovare la distanza che separa i due punti del terreno* A *e* B (fig. 20) *accessibili*, *non essendo possibile di percorrere la retta* AB.

Soluzione. Si segni, come nella risoluzione della precedente questione, una parallela MN alla retta che unisce i due punti dati; è chiaro che si avrà la distanza cercata dalla proporzione

$$OM:OA::MN:AB=\frac{OA\times MN}{OM}.$$

Osservazione. Se fosse possibile di prolungare gli allineamenti OA ed OB di quantità Oa ed Ob, rispettivamente eguali a se stessi, sarebbe meglio, perchè allora si avrebbe addirittura $ab=AB$. Se non fosse possibile di prolungare OA ed OB di quantità eguali a se stesse, e che non si potesse neppure condurre una parallela alla AB nello spazio racchiuso nel triangolo OAB, si prenderebbe sul prolungamento di OA una parte qualunque Om, sul prolungamento di OA, si farebbe On eguale al quarto termine della proporzione

$$OA:Om::OB:On=\frac{OB\times Om}{OA},$$

e si troverebbe finalmente la distanza cercata con quest'altra proporzione,

$$Om : OA :: mn : AB = \frac{mn \times OA}{Om} .$$

5.ª *Trovare la lunghezza di una retta* AB (fig. 21) *accessibile soltanto fra i suoi estremi.*

Soluzione. Per un punto O del terreno si facciano passare due linee, una nella direzione di uno degli estremi A della distanza da determinarsi, l'altra nella direzione dell'altro estremo B; si segnino due punti C e D sulla retta AB, ed un terzo punto P sulla CO; poscia si trovi sulla OD il punto Q, tale che la retta che unisce P con Q sia parallela alla AB; si prolunghi PQ da ambe le parti finchè incontri in M ed in N le rette OA ed OB; dopo ciò si troverà la lunghezza cercata colla proporzione

$$OP : OC :: MN : AB = \frac{OC \times MN}{OP} .$$

Osservazione. Dopo quanto si è detto intorno alla questione precedente è facile immaginarsi come si potrebbe pervenire a segnare sul terreno la retta $ab = AB$; od a trovare la lunghezza di AB mediante la parallela mn compresa fra gli allineamenti OA ed OB prolungati.

6.ª *Trovare la lunghezza di una retta* AC (fig. 22) *accessibile in un solo suo estremo* C.

Soluzione. Si scelga sul terreno un punto D sul prolungamento della AC; si segnino le rette OA, OC e OD, che terminino da una parte sulla retta AD, e dall'altra in un punto O preso arbitrariamente fuori della AD, e si conduca una parallela MN alla retta AD, che tagli le OA,

OC e OD. Si otterrà evidentemente la distanza cercata mediante la proporzione

$$OP : OC :: PM : AC = \frac{PM \times OC}{OP}.$$

Osservazione. Col prolungare le rette OA, OC e OD, e col fare $Oc = OC$, $Od = OD$, si otterrebbe dc parallela a DA; e prolungando dc fino alla sua intersecazione col prolungamento di AO, sarebbe evidentemente $ca = CA$.

7.ª *Trovare la lunghezza di una retta* AB (fig. 23), *tutta inaccessibile.*

Soluzione. Si scelgano arbitrariamente, prima due punti C e D, poi due altri E ed F, uno sulla retta AD, e l'altro sulla retta CD; si faccia $CG = \frac{CF \times CE}{CD}$; risulterà FG parallela alla AD: si faccia parimenti $CI = \frac{CH \times CF}{CD}$; risulterà FI parallela alla DB. Se ora si prolunga FG fino al suo incontro in M colla retta CA, ed FI finchè incontri CB in N, la retta che unisce i due punti M ed N sarà parallela alla retta AB, e si otterrà la lunghezza di questa facendo

$$AB = \frac{CA \times MN}{CM}.$$

Infatti dalle due proporzioni

$$CF : CD :: CM : AC,$$

$$CF : CD :: CN : BC,$$

si deduce quest'altra,

$$CM : AC :: CN : BC \, ,$$

e finalmente

$$CM : AC :: MN : AB \, .$$

8.ª *Per un punto dato* M (fig. 23) *accessibile, condurre una parallela ad una retta* AB *tutta inaccessibile.*

Soluzione. Si prolunghi AM; per un punto C, preso sul prolungamento di AM, si faccia passare un allineamento nella direzione di CB, ed un altro indefinito CD, e si segni su questo un punto D: dal punto M si conduca una parallela alla AD, e dal punto F, in cui questa parallela taglia la retta CD, si conduca una parallela alla BD: la retta MN, che unisce il punto dato M col punto d'intersecazione N dell'ultima parallela colla retta CB, è la parallela domandata.

Ciò si rende manifesto dalla dimostrazione della soluzione precedente.



LEZIONE QUARTA.

MISURA DEGLI ANGOLI. - SQUADRO ORDINARIO.
VERNIERE CURVILINEO.

(letta il 27 gennaio 1851.)

SIGNORI,

Della misura delle linee dovremo nuovamente trattare quando ci occuperemo delle basi trigonometriche, e della riduzione delle distanze all'orizzonte: ciò che finora abbiam detto intorno a tale misura può bastare pei rilevamenti di dettaglio. La misura degli angoli, l'esame e l'uso degli stromenti a ciò destinati, saranno intanto gli oggetti di questa e di alcuna delle susseguenti lezioni.

15. **Principii intorno alla misura degli angoli.** — Gli angoli si misurano per mezzo degli archi di circolo descritti dai loro vertici come centri e compresi fra i loro lati. Per misura o ampiezza d'un arco intendiamo il suo rapporto colla circonferenza intera a cui appartiene.

Per rendere più facile la misura degli angoli si divide la circonferenza in 360 parti eguali dette *gradi*, il grado si suddivide in 60 *minuti*, il minuto in 60 *secondi* ecc. Questo modo di dividere la circonferenza che è antichissimo, ed è pur quello che seguiremo, chiamasi *sessagesimale*. Nel sistema *centesimale*, adottato quasi generalmente in Francia, la circonferenza si divide in 400 gradi, il grado in 100 minuti,

il minuto in 100 secondi ecc. Il rapporto fra il grado sessagesimale e il grado centesimale è dunque $\frac{10}{9}$.

I gradi, i minuti ed i secondi si distinguono rispettivamente colle caratteristiche °, ′, ″: così 17° 25′ 48″ esprimono 17 gradi, 25 minuti, 48 secondi.

Il *complemento* di un angolo o di un arco è ciò che manca a quest'angolo, o a quest'arco per fare 90°, ossia un angolo retto. La somma dei tre angoli di un triangolo essendo sempre eguale a due angoli retti, ne segue che i due angoli acuti d'un triangolo rettangolo sono complementi uno dell'altro.

Il *supplemento* d'un angolo o d'un arco è ciò che manca ad un angolo o ad un arco per fare 180°. In qualsivoglia triangolo rettilineo uno dei tre angoli è dunque supplemento della somma degli altri due.

16. Goniometri e goniografi. — Gli stromenti impiegati nella misura degli angoli diconsi *goniometri*, quelli adoperati nella loro costruzione grafica chiamansi *goniografi*.

Fra i primi considereremo:

Lo squadro ordinario:

Lo squadro graduato:

La bussola topografica:

Il grafometro:

Il teodolite ripetitore:

Fra i secondi:

La tavoletta pretoriana con diottra:

Il rapportatore grafico.

17. Squadro ordinario. — *Lo squadro ordinario* (fig. 24) detto anche *squadro agrimensorio* o *di campagna*, essendo destinato a segnare e misurare angoli retti e semiretti, è necessario che soddisfi alle seguenti condizioni:

1.° *Quando lo squadro è collocato sul suo bastone, l'asse dell'uno deve trovarsi nel prolungamento dell'asse dell'altro.*

2.° *I traguardi devono trovarsi due a due su piani, che facciano fra loro gli angoli sopraddetti, e che passino per l'asse del cilindro.*

A riconoscere se ciò abbia luogo, si pianti il bastone verticalmente nel suolo, verificandone la verticalità col filo a piombo: si collochi quindi sul bastone lo squadro, e nella direzione di una coppia di traguardi si faccia sospendere un filo a piombo; se il filo a piombo si scoprirà per tutta l'altezza dei traguardi, e se ripetendo l'operazione per la coppia di traguardi a questa perpendicolare si otterrà lo stesso risultato, si potrà conchiudere essere l'asse dello squadro per lo meno parallelo all'asse del bastone.

Si facciano poscia piantare due paline ben verticali nella direzione di una coppia di traguardi, in modo che lo squadro si trovi ad eguale distanza fra le due paline; poi nella direzione della coppia di traguardi perpendicolare alla prima, si faccia piantare una terza palina; ciò fatto si giri lo squadro sul suo bastone tanto che, traguardando per la prima coppia, si venga a scoprire l'ultima delle tre paline; allora se traguardando per l'altra coppia si scoprono pure le altre paline, lo squadro sarà giusto, poichè evidentemente in tal caso le due coppie sono fra loro ad angolo retto, e l'asse del cilindro coincide con quello del bastone. In un modo analogo si verificherebbero i traguardi che fanno coi primi degli angoli semiretti.

18. **Uso dello squadro semplice nello stabilimento degli allineamenti.** — Dati i punti estremi A e B (fig. 25) di una retta da segnarsi sul terreno, un solo operatore può trovare collo squadro un terzo punto E sulla medesima retta: a quest'uopo,

piantato verticalmente lo squadro in un punto C presso a poco sulla linea AB, dirige una coppia di traguardi nella direzione del punto A, e senza più toccare allo squadro, osserva se la visuale diretta in senso opposto per la stessa coppia di traguardi va a ferire la palina collocata in B; se ciò non succede, e se, per esempio, questa visuale passa a destra del punto B, trasporta lo squadro a sinistra in un altro punto D, e dispone una coppia di traguardi nel piano verticale, che passando per l'asse dello squadro, passa pure per l'asse geometrico della palina posta in B; osserva poscia se il prolungamento della visuale DB va a battere nella palina posta in A, e se ciò non ha luogo, trasporta ancora convenientemente lo squadro: ripetendo simile operazione non tarderà dopo alcuni tentativi a piantare il bastone dello squadro sulla linea AB. Ciò ottenuto, toglie questo, colloca in sua vece una palina, e compie la linea come si è altra volta accennato.

È facile immaginarsi come un operatore possa dirigere un altro individuo nel tracciamento di una linea AB, mediante lo squadro collocato in un punto A della medesima; nè è più difficile il porre lo squadro nel piano verticale condotto per gli assi di due paline collocate verticalmente in due punti del terreno, quando fra questi trovasi una prominenza di terra su cui è possibile stabilirsi.

19. **Problemi che si possono risolvere mediante lo squadro.** — 1.° *Segnare sul terreno una perpendicolare ad una retta data, che passi per un punto preso sopra o fuori di questa.*

Soluzione. Nel primo caso si pianti il bastone dello squadro nel punto dato, si giri poscia lo squadro finchè per una coppia di traguardi si scopra una palina della retta data, e si faccia piantare una o più paline nella direzione della vi-

suale condotta per la coppia di traguardi perpendicolare alla prima.

Nel secondo caso si cammini sulla retta data, finchè si possa supporre di essere presso al piede della perpendicolare cercata; ivi si pianti lo squadro, e si osservi se scoprendo per una coppia di traguardi una palina della retta data, per la coppia perpendicolare alla prima si scopra pure il punto dato; se ciò ha luogo, il piede dello squadro è pure il piede della perpendicolare; se non si scopre il punto dato, si trasporti lo squadro innanzi o indietro sulla retta data, e si ripeta l'osservazione; dopo poche prove si perverrà a trovare il piede della perpendicolare che si vuol segnare.

2.° *Palinare una retta, quando fra i punti* A *e* B (fig. 26) *che la determinano si frappone un ostacolo* X, *che impedisce a chi si colloca in uno di essi di veder l'altro.*

Soluzione. Si traccia sul terreno una retta MN in una direzione arbitraria; percorrendo poscia la medesima, si segnano su di essa i piedi P e Q delle perpendicolari abbassate dai punti dati A e B, e si fa $BR=AP$: la retta che unisce i punti P ed R sarà evidentemente parallela alla AB; dunque se si abbassa dal punto B la perpendicolare BS alla retta PR, e dopo di aver innalzate due perpendicolari in due punti H, K, presi arbitrariamente su questa, si portano sulle medesime le lunghezze HC, DK eguali ad RS, i punti C e D si troveranno sulla retta AB.

Si dovrebbe operare in modo analogo se si volesse prolungare la retta AC oltre l'ostacolo X.

3.° *Trovare la distanza fra due punti* A *e* B (fig. 27) *collocati in modo che non è possibile andare dall'uno all'altro se non percorrendo una linea sinuosa.*

Si cammini per una linea poligonale ad angoli retti fatti

collo squadro nei risvolti h, k, l, ecc. della strada che conduce da A in B, e si misurino i lati Ah, hk, kl, lm, ecc. di tale linea. Se si suppongono prolungati i lati Ah, Bs, ed on, finchè i due primi prolungamenti incontrino il terzo in D ed E, si avrà

$$AD = Ah + kl + mn\,,\quad BE = Bs + rq + po\,,$$

$$Do = hk + lm + no\,,\quad Eo = sr + pq\,,$$

e se dal punto A si suppone condotta una parallela AC alla Do, si avrà

$$AC = Do - oE\,,\quad BC = BE - AD$$

e si troverà finalmente la lunghezza cercata facendo

$$BA = \sqrt{\overline{AC}^2 + \overline{BC}^2}\,.$$

Se si dovesse prolungare la retta che unisce i punti A e B, e che da B non si scorgesse A; dopo di avere nel modo precedente trovate le distanze BC ed AC, si troverebbe il punto t colla seguente proporzione,

$$AC : CB :: Bs : st = \frac{CB \times Bs}{AC}\,,$$

e la retta Bt sarebbe perpendicolare a quella che unisce i punti dati A e B, per essere i due triangoli ABC e Bst simili. Segnando dunque la perpendicolare BM condotta pel punto B alla retta Bt, sarà questa il prolungamento di AB.

4.° *Trovare la lunghezza di una retta* AB (fig. 28) *accessibile fra i suoi estremi.*

Soluzione. Pel punto C preso sulla retta AB si conduca a questa una perpendicolare, per un punto P di questa perpendicolare si tiri una perpendicolare MN alla CP, che sarà nello stesso tempo parallela alla retta AB; si trovino sulla MN i piedi M ed N delle perpendicolari abbassate dagli estremi A, B della retta da misurarsi, si avrà $MN = AB$.

5.° *Trovare la lunghezza di una retta* AB (fig. 29) *accessibile in un suo estremo* B.

Soluzione. Piantato lo squadro nel punto B si faccia segnare la BM perpendicolare ad AB, poscia camminando su questa perpendicolare si cerchi un punto C, dal quale dirigendo una visuale per una coppia di traguardi al punto A, la visuale condotta per la coppia che fa colla prima un angolo di 45° vada a battere la palina collocata in B; sarà $BC = AB$.

Se non fosse possibile piantare lo squadro in un punto C tale che si avesse $ABC = 45°$, si alzerebbe in qualunque punto M della retta BM una perpendicolare MN a questa, si cercherebbe poscia il punto P in cui la retta BM viene intersecata dalla retta AN, ed essendo i due triangoli ABP, MPN simili, per aver un angolo retto ed un angolo opposto al vertice, si troverebbe la distanza AB colla seguente proporzione

$$PM : MN :: PB : AB = \frac{MN \times PB}{PM}.$$

6.° *Trovare la lunghezza d'una retta* AB (fig. 30) *tutta inaccessibile*.

Soluzione. Si tracci in qualsivoglia direzione una linea MN e si segnino i piedi C e D delle perpendicolari AC,

BD alla MN; si trovino le lunghezze di queste due perpendicolari accessibili in un solo estremo, come si è precedentemente indicato, si avrà evidentemente

$$AB = \sqrt{CD^2 + (BD - AC)^2},$$

e se si porta da D in P e da C in Q una lunghezza eguale alla differenza $BD - AC$, le rette CP e DQ saranno parallele ed eguali ad AB.

20. **Rilevare il piano di un tratto di terreno collo squadro.** — Si percorra prima d'ogni cosa il terreno facendo piantare una palina sopra ogni punto da rilevarsi e disegnando un abbozzo della figura del terreno medesimo. Si segni poscia un allineamento che si chiama *base* o *fondamentale* dell'operazione, la quale attraversi il tratto di terreno in una delle maggiori sue lunghezze, che si possa tutta comodamente misurare, e che da essa si scoprano, o tutte, o la più gran parte delle paline collocate sui punti del terreno da rilevarsi.

Ciò fatto si cammini sulla base abbassando delle perpendicolari da tutti i punti che da essa base si scoprono da una parte della medesima, misurando i tratti della base compresi fra il punto di partenza A (fig. 31), e i piedi B, C, ecc. delle perpendicolari, misurando pure ciascuna di queste, e notando successivamente ogni distanza sull'abbozzo, sul quale si indicheranno pure la base, le perpendicolari e tutte le rette condotte nel corso del rilevamento. Quando l'operatore sarà giunto all'estremo della base tornerà indietro, rilevando i punti che si trovano dall'altra parte della base, fino a che sia nuovamente giunto al punto da cui era partito.

Coi dati in tal modo rilevati sarà facilissimo a chi pos-

segga i primi elementi della geometria, il costrurre sulla carta, alla scala che si sarà stabilita, una figura simile a quella del terreno su cui si saranno eseguite le precedenti operazioni.

Per lo più non tutti i punti da rilevarsi sono visibili dalla base, e bene spesso, quantunque si possano dalla medesima scoprire, ne sono troppo distanti, per cui conviene molte volte condurre altre linee più vicine a questi punti, quali sarebbero le MN, PQ, che si devono però appoggiare agli estremi di due perpendicolari CM, DN ecc. alla base, acciocchè sia ben determinata la posizione di ciascuna di esse sul piano; esse servono di nuove basi al rilevamento dei punti che non si poterono rilevare dalla base primitiva.

Se nel terreno da rilevarsi trovasi qualche curva $MHKN$, si usa condurre equidistanti le perpendicolari abbassate sulla rispettiva base dai diversi punti di ciascuna curva, onde rendere il calcolo dell'area del terreno rilevato più breve e più approssimato, come si vedrà a suo luogo; questo metodo però, di condurre le perpendicolari equidistanti, conviene solo quando la curva ha una forma non troppo irregolare.

Quando il terreno da rilevarsi è tutto o in parte inaccessibile, si circoscrive alla parte inaccessibile, collo squadro, un triangolo rettangolo, un rettangolo od un quadrilatero che abbia due angoli retti, oppure anche un poligono ad angoli retti, e prendendo poscia per basi i lati della figura circoscritta, si rileva il perimetro del terreno, camminando collo squadro su tali basi. È facile immaginarsi come si possano poi rilevare i punti posti nell'interno, semprecchè sieno visibili, mediante i metodi precedentemente esposti per mi-

surare le distanze accessibili ad un loro estremo, od affatto inaccessibili.

21. **Verniere curvilineo.** — Sia AB (fig. 32) un quadrante graduato di grado in grado, ed MN un verniere, ossia un arco concentrico, che abbraccia, per esempio, 9° divisi in dieci parti eguali: se il verniere scorre sul quadrante partendo da zero, finchè la sua prima divisione coincida colla prima della periferia, esso descriverà un arco eguale alla differenza fra una delle parti della medesima, ed una delle sue parti, la quale differenza è $1^\circ - \frac{9^\circ}{10} = \frac{1^\circ}{10} = 6'$; se il verniere continua a scorrere, finchè la seconda sua divisione coincida colla seconda della periferia, esso descriverà un arco eguale a $2\left(1^\circ - \frac{9^\circ}{10}\right) = \frac{2^\circ}{10} = 12'$; quando la terza divisione del primo coinciderà colla terza della periferia, il verniere avrà descritto un arco di $18'$, ecc.

Vediamo ora come serva il verniere alla stima degli angoli: supponiamo che per misurare un angolo ACD (fig. 32) si sia fatto scorrere il verniere fino a prendere la posizione $M'N'$, e proviamoci a fare la lettura dell'angolo: osserviamo da prima il zero del verniere, e vedremo che esso ha oltrepassato i 56° senza toccare i 57°; l'angolo misurato è dunque compreso fra 56° e 57°. Percorriamo quindi le divisioni del verniere, e riconosceremo che la sesta sua divisione coincide con una delle divisioni della circonferenza, che è la sesta dopo quella segnata 56, per cui conchiuderemo essere l'angolo misurato di $56^\circ + 6 \times 6' = 56^\circ 36'$; se la circonferenza essendo divisa in 360°, si volessero stimare gli angoli con errori minori di $1'$, bisognerebbe che il verniere abbracciasse 59°, e fosse diviso in 60 parti

eguali, perchè allora vi sarebbe

$$1° - \frac{59°}{60} = \frac{1°}{60} = 1' :$$

però, acciocchè il verniere non riesca tanto grande, quando si vuole una tale od una maggiore approssimazione, si usa dividere la circonferenza in un numero di parti che sia un multiplo intero di 360; così nel caso che ci occupa si dividerebbe la circonferenza in 720 parti eguali, ed ogni parte del verniere si farebbe eguale a $\frac{29}{30}$ di ciascuna di quelle della circonferenza; infatti si ha allora

$$\left(1 - \frac{29}{30}\right)\frac{1}{720} = \frac{1}{30} \times 30' = 1' .$$

In generale sia $m \times 360$ il numero di parti in cui è diviso il disco di un goniometro, $n - 1$ il numero delle parti che abbraccia il verniere diviso in n parti eguali, si avrà

$$\left(1 - \frac{n-1}{n}\right) \times \frac{1}{m \times 360} = \frac{1°}{m\,n} .$$

Si supponga il disco di un goniometro graduato di 10 in 10 minuti, ossià diviso in 2160 parti, e che il verniere ne contenga 59 divise in 60 parti eguali; facendo nella formola precedente $m = 6$, $n = 60$, si troverà che con un disco graduato in tal modo, e con un sì fatto verniere, si ha un'approssimazione di

$$\frac{1°}{360} = \frac{3600''}{360} = 10'' .$$



LEZIONE QUINTA.

SQUADRO GRADUATO, GRAFOMETRO, RAPPORTATORE GRAFICO.

(letta il 31 gennaio 1834.)

Signori,

Avendo nella precedente lezione esaminato lo squadro semplice, l'ordine delle materie ci conduce ora naturalmente a parlare dello squadro graduato, del grafometro e del rapportatore grafico.

22. **Squadro graduato.** — *Lo squadro graduato, o pantometro di Fauquier* (fig. 33) ha la forma d'uno squadro ordinario tagliato in due parti disuguali da un piano perpendicolare al suo asse: le due parti cilindriche poste così l'una sull'altra si tengono unite mediante un perno, intorno al quale può girare la parte superiore che porta il verniere, mentre l'inferiore, che contiene la graduazione intera, rimane fissa. Quando il zero del cilindro inferiore si trova verso l'osservatore, la graduazione procede da sinistra a destra, da 0° a 360°. I due cilindri hanno ciascuno una fessura, e, diametralmente opposta a questa, una finestrella munita di un filo sottile: la fessura della parte fissa corrisponde all'origine della graduazione intera, e quella della parte mobile corrisponde al zero del verniere.

Per misurare l'angolo fatto da due piani verticali condotti pel centro dello squadro graduato, e per due punti del terreno, dopo di aver fatto coincidere il zero del verniere con quello della circonferenza, si fa girare tutto il cilindro finchè, osservando pei due traguardi, i fili opposti vengano a coprire la palina collocata sul punto di destra, poscia lasciando fissa la parte inferiore, si fa girare la parte superiore finchè il filo, osservato pel traguardo superiore, copra la palina collocata sul punto di sinistra, si legge poi sulla circonferenza e sul verniere la grandezza dell'angolo che si è in tal modo misurato.

L'uso di questo stromento, che si può munire di un cannocchiale, è analogo a quello degli altri goniometri, e può anche rendersi ripetitore, come si vedrà nell'esaminare il teodolite.

Le verificazioni da farsi allo squadro graduato consistono nel riconoscere:

1° *Se coincidendo il zero del verniere con quello della circonferenza graduata, ed essendo il piano superiore del cilindro orizzontale, i traguardi ed i fili opposti sono in uno stesso piano verticale condotto per l'asse.*

2° *Se la graduazione è esatta.*

Si riconosce se i traguardi ed i fili opposti sono nello stesso piano verticale quando i due zeri coincidono, dirigendo pei due traguardi, superiore ed inferiore, due visuali ad un filo a piombo sospeso a qualche distanza, dopo di aver fatto coincidere i due zeri.

Si verifica se i piani in cui si muovono i traguardi ed i fili opposti passano per l'asse del cilindro, facendo coincidere il zero del verniere successivamente colle divisioni 0°, 90°, 180° e 270° della circonferenza, facendo collocare

quattro paline, presso a poco ad eguale distanza dallo stromento, nelle direzioni determinate dal traguardo superiore e dal filo opposto nelle predette quattro posizioni del zero del verniere, ed operando poscia come si è detto doversi fare nel verificare la condizione analoga nello squadro ordinario, dopo di aver nuovamente fatto coincidere il zero del verniere colla divisione 90°.

Finalmente si verifica la seconda condizione nel modo che fra breve indicheremo esaminando il grafometro, e questa verificazione sarà pure applicabile a qualunque altro goniometro.

23. **Grafometro.** — Il *grafometro* (fig. 34) è composto d'un semicircolo graduato *ab* mobile attorno ad un asse che passa pel suo centro *o*, e di due cannocchiali, uno che dicesi fisso *cd*, ma che però si può muovere in un piano perpendicolare a quello del semicircolo; l'altro *ef*, mobile pure in un piano perpendicolare a quello del semicircolo, è munito di una diottra *gh* con due vernieri, e può girare intorno al centro indipendentemente dal semicircolo.

Tanto il piano del grafometro quanto quello della circonferenza graduata del pantometro di Fauquier, ed in generale i dischi di tutti i goniometri devono potersi disporre orizzontalmente mediante opportuni meccanismi, che consistono ordinariamente in tre viti *v*, *v*, disposte in modo da trovarsi ai vertici di un triangolo equilatero, od in quattro viti formanti un quadrato, ed uno o due livelli a bolla d'aria *kl*. A tutti e due questi stromenti si adatta qualche volta una bussola che serve ad orientare i rilevamenti, come si vedrà più tardi.

Per misurare l'angolo fatto dalla proiezione orizzontale di due allineamenti segnati sul terreno, si colloca lo stro-

mento in modo che il suo centro si trovi sulla verticale che passa pel punto d'intersecazione dei due allineamenti, ed ivi orizzontato il semicircolo, si rivolge il cannocchiale fisso ad un punto di una delle due rette, poscia col cannocchiale mobile si dirige una nuova visuale ad un punto dell'altra retta; l'angolo che segna il verniere sarà quello domandato.

Le verificazioni da farsi al grafometro si possono ridurre alle seguenti:

1° *Riconoscere se, il piano del semicerchio essendo orizzontale, gli assi dei cannocchiali si muovono in piani verticali:*

2° *Se il piano in cui si muove l'asse del cannocchiale detto fisso, e quello in cui si muove l'asse del cannocchiale mobile, quando il zero del verniere coincide con quello del semicerchio, coincidono fra loro:*

3° *Se il piano in cui si muove l'asse del cannocchiale mobile passi in ogni sua posizione pel centro del semicerchio:*

4° *Infine se la divisione del lembo sia esatta.*

Si riconosce la prima condizione disponendo il semicerchio orizzontalmente, poi traguardando successivamente per i due cannocchiali un filo a piombo collocato a qualche distanza, ed osservando se il centro della reticola di ciascun cannocchiale, nel muovere questi nel senso verticale, passa sempre pel filo a piombo.

Si verifica la seconda condizione disponendo il cannocchiale superiore in modo che il zero del verniere coincida col zero del semicircolo, collocando lo stromento col suo centro sulla verticale di un punto appartenente ad una retta già palinata sul terreno, poscia girando il semicerchio già ridotto orizzontale, finchè pel cannocchiale fisso si scopra un punto di questa retta; se lo stromento soddisfa alla seconda condizione, si dovrà pel cannocchiale mobile scoprire

pure lo stesso punto. Ciò non essendo, lo stromento è affetto dell'errore di *parallelismo*, ossia di *collimazione*, errore che ordinariamente si può togliere mediante una vite di richiamo che fa cangiare la posizione del filo verticale del cannocchiale fisso, oppure quella del filo del cannocchiale mobile: se il grafometro non è munito di simile congegno, si cerca il valore dell'errore di collimazione, onde tenerne conto nella misura degli angoli, facendo girare il cannocchiale mobile finchè il centro della sua reticola si veda sullo stesso punto su cui si è diretto quello del cannocchiale fisso; l'angolo percorso sarà evidentemente l'errore di collimazione cercato, che può essere addittivo o sottrattivo, ciò che facilmente si può riconoscere.

L'errore di collimazione non può più influire sulla misura degli angoli se si adopera il solo cannocchiale mobile nelle osservazioni, operando nel seguente modo: dopo di aver fatto coincidere i due zeri, si collochi il grafometro col suo centro nella verticale del vertice dell'angolo da misurarsi; si faccia girare lo stromento fintantochè col cannocchiale mobile si scopra un punto di uno dei due lati dell'angolo, poscia fissando il semicircolo si rivolga il cannocchiale mobile sopra un punto dell'altro lato; è chiaro che in tal modo l'arco percorso dal zero del verniere sarà la misura della proiezione orizzontale dell'angolo fatto dalla prima e dall'ultima direzione dell'asse del cannocchiale. Operando in tal modo il cannocchiale fisso non servirebbe più ad altro, se non che ad osservare, prima e dopo della misura, un punto in lontananza, onde riconoscere se lo stromento non siasi spostato nel corso delle operazioni. Questo metodo è pure vantaggiosamente applicabile allo squadro graduato quando è munito di un cannocchiale, e vedremo nel corso

di queste lezioni, essere appunto quello impiegato nelle osservazioni fatte col teodolite ripetitore.

Per verificare se sia soddisfatta la terza condizione, si faccia stazione col grafometro orizzontato in un punto qualsivoglia d'una retta MN (fig. 35) sul terreno; si dirigano due visuali, una pel cannocchiale fisso, ad un punto N di quella retta, l'altra pel cannocchiale mobile, ad un punto qualsiasi P del terreno; si legga l'angolo che viene indicato dal verniere, poi si giri lo stromento finchè per mezzo del cannocchiale fisso si scopra il punto P, e pel cannocchiale mobile si diriga una visuale al punto M della retta, diametralmente opposto a quello a cui già si era collimato; se l'angolo che segnerà il verniere sarà supplemento del primo osservato, la detta terza condizione sarà soddisfatta. Se ciò non ha luogo, lo stromento è affetto dell'errore di *eccentricità* che varia col variare della distanza degli oggetti e della grandezza degli angoli osservati, e che quando esiste, è quasi sempre piccolissimo e trascurabile in questa sorta di stromenti.

Per riconoscere finalmente se la graduazione è esatta, si misuri l'angolo che due visuali fanno fra loro, e quello che ciascuna fa con una terza, la differenza fra questi ultimi due angoli deve essere eguale al primo. Si ripeta quest'osservazione più volte dirigendo visuali che facciano angoli di diversa grandezza.

Il grafometro che abbiamo finora descritto non è quasi più in uso; in sua vece s'impiega lo squadro graduato, o stromenti a circolo intero, ordinariamente ripetitori, che si verificano e si rettificano presso a poco come si è detto pel grafometro.

24. Rapportatore grafico. — Il *rapportatore grafico* (fig. 36)

è uno stromento di metallo, o di corno trasparente, che serve a costrurre sulla carta gli angoli che si sono misurati sul terreno, od anche a misurare gli angoli già costrutti sulla carta. Esso è composto d'un semicircolo *a m b* e d'un rettangolo *a b c d* che ha per lati maggiori il diametro stesso del semicircolo, ed una parallela a questo diametro. La periferia del semicircolo è divisa in 180°, procedendo da destra a sinistra, e da sinistra a destra.

È troppo facile lo immaginarsi come si misurino sulla carta gli angòli col rapportatore grafico. Non ci occnperemo pertanto che della costruzione degli angoli, che è pure un'operazione facilissima.

Dovendosi condurre per un punto *P* (fig. 37), dato sopra una retta *A B*, un'altra retta *P M*, che faccia colla prima un angolo dato, si disponga il rapportatore in modo, che quello de'suoi raggi che unisce il centro alla divisione della periferia indicante l'angolo dato, essendo sulla retta data *A B*, il lato del rettangolo di esso rapportatore, che è opposto al diametro, tocchi il punto dato *P*; ciò fatto si tiri una retta *P M* lungo il detto lato; è chiaro che l'angolo *M P B*, fatto da questa retta con quella data, sarà l'angolo che si voleva costrurre.

Nello stesso modo si opererebbe se il punto dato fosse posto fuori della retta *A B*.

Si fanno pure dei rapportatori grafici rettangolari (fig. 38), ed altri muniti d'un verniere, mediante il quale è possibile costrurre con maggiore approssimazione gli angoli, che nella loro misura contengono frazioni di grado.

25. **Uso dei goniometri nel rilevamento de' piani.** — Il rilevamento di una data figura del terreno mediante il grafometro, od altro goniometro qualsivoglia, dipende dai metodi im-

piegati dalla geometria nella costruzione di figure eguali o simili ad altre figure date. Per esempio, dovendosi costrurre un poligono *abcdefg* (fig. 39) eguale al poligono dato *ABCDEFG*, sappiamo potersi ciò fare in tre diverse maniere:

1° Decomponendo il poligono dato in triangoli, mediante linee rette condotte da uno de'suoi vertici, o da un punto *O* qualunque scelto nell'interno o fuori del poligono dato; costruendo intorno ad un punto *o* tutti gli angoli fatti intorno al punto *O*, portando sui lati di questi angoli le lunghezze $oa = OA$, $ob = OB$, $oc = OC$, ecc., ed infine conducendo i lati *ab*, *bc*, *cd*, ecc.

2° Conducendo dagli estremi *A* e *B* di una base (fig. 40), che può anche essere un lato, delle rette a tutti i vertici del poligono dato, e copiando gli angoli *BAC*, *BAD* ecc., *ABG*, *ABF* ecc., agli estremi della retta $ab = AB$, ciò che determinerà i vertici *c*, *d*, *e*, ecc., mediante le intersecazioni delle rette *bc*, ed *ac*, *bd*, ed *ad*, ecc.

3° Finalmente facendo successivamente tutti gli angoli *a*, *b*, *c*, ecc. (fig. 41), e tutti i lati *ab*, *bc*, *cd*, ecc., del poligono *abcdefg*, eguali ciascuno a ciascuno di quelli del poligono dato.

In egual modo, dovendosi costrurre sulla carta una figura simile alla figura data *ABCDEFG* del terreno, si possono impiegare tre metodi:

1° Fatta stazione col grafometro o con altro goniometro in un punto del terreno *O* (fig. 39), tale che si possano, stando in esso, comodamente scoprire tutti i punti da rilevarsi, si dirigano delle visuali a tutti questi punti, misurando tutti gli angoli *AOB*, *BOC*, ecc., e le proiezioni di tutti i raggi condotti dal punto *O* ai vari punti *A*, *B*, *C*, ecc.;

ciò fatto, con questi dati sarà facile costrurre sulla carta un poligono simile a quello del terreno.

Questo primo metodo di rilevamento dicesi d'*irradiamento*.

Dopo di aver misurati tutti gli angoli fatti dai diversi raggi intorno al punto *O*, si sarà fatto ciò che dicesi un *giro d'orizzonte*. Si avrà una prova di non aver commesso errori sensibili nella misura degli angoli, se facendo la somma di tutti gli angoli, si troverà essere eguale a 360°. Per quanta attenzione però si metta nel misurare gli angoli in un giro d'orizzonte, sarà ben difficile che la loro somma risulti esattamente eguale a quattro angoli retti, e non si otterrà quasi mai se non un'approssimazione più o meno grande, secondo l'abilità dell'operatore e la perfezione dello stromento adoperato.

2° Condotta una base in luogo tale che si possa comodamente misurare, e che dalle sue estremità *A* e *B* (fig. 40) si possano scoprire i diversi punti del terreno che si vogliono rilevare, si fa successivamente stazione in *A* e *B*, in ciascuna stazione si misurano gli angoli fatti colla base dai raggi diretti a tutti i punti *C*, *D*, *E*, ecc.. e si misura la base; questi dati, registrati sull'abbozzo che si sarà fatto della figura, serviranno a farne una simile sulla carta.

Questo è il metodo detto d'*intersecazione*.

In un rilevamento fatto per intersecazione si devono assolutamente rifiutare le intersecazioni che si fanno troppo obbliquamente; la migliore intersecazione è quella che si fa ad angolo retto, e non devonsi mai oltrepassare i limiti di 60° e 120°.

3° Si misurano sul terreno tutti gli angoli del poligono e tutti i lati, poscia si costruisce in scala sulla carta, con questi dati, una figura simile al poligono del terreno.

Questo metodo dicesi di *camminamento*.

Nel metodo di camminamento basterebbe, rigorosamente parlando, che si misurassero solo tutti gli angoli meno due, e tutti i lati meno uno, o tutti i lati meno due e tutti gli angoli meno uno, come può facilmente riconoscere chi possegga i primi elementi della geometria; ma l'operatore non si deve mai privare dei mezzi di verificare se possa aver commesso qualche grave errore nel raccogliere i dati sul terreno, o nella costruzione del piano, ciò che non potrà sfuggire quando si sieno, come abbiam detto, misurati tutti gli angoli e tutti i lati. Un mezzo di controllo per la misura degli angoli, che si può applicare prima di abbandonare il terreno, si è quello di verificare se la somma degli angoli interni al perimetro della figura rilevata è eguale, almeno nei limiti della tolleranza, a tante volte 180° quanti sono i lati del poligono meno 360°.

Dall'aver descritto i precedenti tre metodi separatamente, non devesi conchiudere che s'impieghi in ogni rilevamento un solo di essi, che anzi non si ricorre, se non in casi assai rari, ad un solo metodo, ma si adoperano tutti e tre promiscuamente, secondo le circostanze e le accidentalità del terreno. Per esempio, dovendosi rilevare un tratto di terreno composto di diversi appezzamenti, intersecato da strade, canali, torrenti e simili, si potrebbe incominciare dal palinare e misurare una prima base AB (fig. 42); facendo poi stazione agli estremi A e B di tale base, si rileverebbero per irradiamento tutti i punti a, b, c, d, ecc. pei quali è possibile trovare le distanze dal punto di stazione o colla misura diretta, o colla stadia, e per intersecazione, tutti quei punti m, ecc., che non si possono in altro modo determinare: segnando e misurando poscia una nuova base

BC, si opererebbe in ciascuno de' suoi estremi come si è operato negli estremi della base *AB*; e si continuerebbe in tal modo il rilevamento, facendo stazione successivamente nei punti *D*, *E*, *F*, ecc., scegliendo per ultima base una retta *FA* che unisca l'ultimo punto di stazione *F* col primo punto *A*, e misurando infine l'angolo *FAB* fatto dall'ultima base che si è misurata colla prima. Sarà anzi meglio, ogni qualvolta ciò si possa eseguire, di misurare, oltre gli angoli fatti dalle basi fra loro e coi raggi diretti ai diversi punti del terreno, misurare dico anche gli angoli *FAB*, *FBE*, *EBD*, ecc., che ogni base fa colle visuali dirette ai punti di stazione visibili da ciascuna di esse, ciò che determinerebbe una specie di triangolazione, e porgerebbe il mezzo di riconoscere di tanto in tanto l'esattezza che si va ottenendo nella misura degli angoli, verificando se la somma dei tre angoli di ciascun triangolo è sempre pressochè eguale a 180°. Nel modo fin qui descritto si rileverebbero dunque i punti *a*, *b*, *c*, *d*, ecc., per irradiamento, i punti *m*, *n*, ecc., per intersecazione, ed i punti *A*, *B*, *C*, ecc., per camminamento.



LEZIONE SESTA.

TAVOLETTA PRETORIANA, DECLINATORIO.

(letta il 3 febbraio 1854.)

Signori,

Fra i goniometri ci rimangono ancora ad esaminare la bussola topografica, ed il teodolite ripetitore: ma fra gli accessorii alla tavoletta pretoriana essendo compreso il declinatorio, che è pur esso una specie di bussola, ci occuperemo nella presente lezione di questi due stromenti, rimandando alla lezione susseguente l'esame della bussola topografica, che ci riuscirà più facile dopo quanto avrem detto intorno al declinatorio.

26. **Tavoletta pretoriana.** — *La tavoletta pretoriana* (fig. 43), così chiamata dal nome del suo inventore Pretorio, *professore a Norimberga nel sedicesimo secolo*, consta d'una tavola da disegno detta specchio AB, e d'un trepiede, al quale si può fissare mediante un perno a vite che le serve d'asse di rotazione, tre altre viti v, v, v, che attraversano la testa CD del trepiede, e che sono disposte in modo da trovarsi ai vertici di un triangolo equilatero, servono a rendere orizzontale lo specchio, sul quale si colloca a quest'uopo un livello a bolla d'aria, prima nella direzione di due delle dette tre viti, poi in una direzione perpendicolare alla prima:

f

finalmente una vite orizzontale *o o'* detta *vite di richiamo* serve a dare movimenti appena sensibili allo specchio della tavoletta.

Colla tavoletta pretoriana, sul cui specchio si distende il foglio che deve ricevere il rilevamento, e con una diottra (fig. 44), si disegna, alla scala che si vuole, una figura simile alla pianta naturale del terreno da rilevarsi, mediante i dati che si vanno di mano in mano sul luogo stesso rilevando, in un modo analogo a quello con cui si farebbe al tavolino una figura simile ad una figura data.

È la diottra una riga di ferro o d'ottone *M N*, a cui è sovrapposta una colonna sulla quale giace un segmento di cilindro *c* attraversato da un perno, il cui asse deve essere parallelo alla faccia inferiore della riga, e perpendicolare al filo della medesima: questo perno è saldamente unito ad un tubo *t t'* o fascia che cinge un cannocchiale *A B* munito di una reticola formata di due fili fra loro perpendicolari, come quella dei cannocchiali di tutti i goniometri. Una vite *v* che entra nel segmento di cilindro predetto dall'apertura opposta a quella in cui viene introdotto il perno, ritiene il cannocchiale unito alla colonna in modo che movendosi non possa il suo asse uscire dal piano, che essendo perpendicolare alla faccia inferiore della riga, passa pel filo *N P* della medesima.

Il piano nel quale si muove l'asse del cannocchiale vien chiamato *piano di collimazione*, ed il filo *N P* della riga dicesi *linea fiduciale.*

Prima di servirsi di una diottra devesi riconoscere:

1° *Se l'asse ottico del cannocchiale*, vale a dire, quello che passa per l'intersecazione de'due fili della reticola, *è perpendicolare all'asse di rotazione:*

2.° *Se il predetto asse ottico si muove in un piano verticale, quando la faccia inferiore della riga si trova su di un piano orizzontale:*

3° *Se il piano verticale nel quale si muove il cannocchiale passa per la linea fiduciale della riga.*

Se la prima condizione non avesse luogo, l'asse ottico, invece di descrivere un piano nel suo movimento, descriverebbe una superficie conica.

Per riconoscere se ciò abbia luogo, disposto orizzontalmente lo specchio della tavoletta, si diriga col cannocchiale una visuale ad un punto *M* (fig. 45) posto a qualche distanza, e si segni sullo specchio una retta *mn* contro il filo o spigolo della riga; poscia si volti la diottra in senso opposto, collocando sempre lo stesso spigolo della riga contro la retta tracciata; finalmente si faccia descrivere un mezzo giro al cannocchiale. Se si scopre ancora dopo ciò il punto da principio osservato, la prima condizione è adempiuta. Se ciò non ha luogo, l'asse ottico farà un angolo colla retta segnata sulla tavoletta, che supponiamo ora essere la *ab;* si segni un punto *o* sulla retta *ab*, ed appoggiando il filo della riga contro questo punto, in modo che esso sia presso a poco nella proiezione del centro di rotazione dell'asse predetto, si diriga una nuova visuale al punto del terreno, e si tracci una nuova retta *a′b′* sulla tavoletta contro lo spigolo della riga; l'angolo *aoa′*, fatto da quest'ultima retta colla prima, sarà evidentemente il doppio di quello che il predetto asse fa colla linea fiduciale; onde se si divide l'angolo *aoa′* per metà, si fa combaciare il filo della riga colla bissettrice dell'angolo, e finalmente colle viti di richiamo della reticola si trasporta l'intersecazione de' fili sull'immagine del punto del terreno, la diottra adempierà allora alla prima condizione.

Si può anche fare tale verificazione nel modo seguente: posta una palina *A* (fig. 46) nella direzione dell'asse ottico, si segni sullo specchio contro il filo della riga una retta, quindi si rivolga il cannocchiale in senso opposto, e si faccia piantare una nuova palina *B* nella direzione della visuale che passa per l'intersecazione de' due fili; si osservi se le due paline ed il centro *O* del cannocchiale sono in linea retta; se ciò non è, si metta una nuova palina *M* sul prolungamento della retta *OA* segnata dalla prima palina e dal centro del cannocchiale, e si muovano i fili fintantochè la loro intersecazione cada sulla metà *C* della distanza *BM* che separa le due ultime paline *B* ed *M*.

Per riconoscere se il cannocchiale soddisfaccia alla seconda condizione, si sospenda a sufficiente distanza un filo a piombo, e si rivolga l'intersecazione de' fili su di esso; se movendosi il cannocchiale l'intersecazione de' fili cammina sempre sul filo a piombo, la seconda condizione ha luogo.

Per verificare finalmente l'ultima condizione, si collochi la diottra diagonalmente in modo che intersechi due lati contigui della tavoletta e si segni lungo lo spigolo della riga una retta: si faccia poscia collocare verticalmente una palina alla più grande distanza possibile nel piano di collimazione, e si rovesci poi la diottra in modo che la faccia superiore della riga combaci colla superficie superiore dello specchio, e la linea fiduciale coincida colla retta precedentemente tracciata: se in tale posizione della diottra si vede ancora la palina all'intersecazione de' fili della reticola, la terza condizione esiste, altrimenti riconducendo l'intersecazione dei fili sulla palina col muovere la riga della diottra, e segnando sullo specchio una nuova retta, l'angolo fatto da questa colla prima segnata sarà il doppio di quello che l'asse fa col filo della riga, e che vien chiamato *errore di collimazione*.

Una diottra che non soddisfaccia esattamente a questa terza condizione può tuttavia adoperarsi senza tema di commettere per ciò solo degli errori, purchè il centro dei movimenti della diottra si faccia sempre cadere al piede della colonna che porta il cannocchiale.

27. **Rilevamento di un angolo mediante la tavoletta.** — Col mezzo della tavoletta e di una diottra si ottiene con molta facilità l'angolo fatto da due dati piani verticali; infatti, portata la tavoletta sul punto A (fig. 47), proiezione sul terreno dell'intersecazione de'due piani, ivi si orizzonti lo specchio, sul quale si sarà preventivamente disteso ed incollato un foglio da disegno, si segni con un ago sottilissimo il punto a in cui la verticale del punto A verrebbe ad intersecare il piano superiore della tavoletta, e posto lo spigolo della riga contro il punto a, si collimi successivamente ai due punti B e C; è chiaro che il detto spigolo verrà a trovarsi, prima nel piano verticale condotto per AB, poi in quello che passa per AC, e poichè il piano dello specchio è orizzontale, esso è perpendicolare ai due piani predetti, epperciò segnando sulla carta con una punta contro lo spigolo della riga le traccie ab ed ac dei due piani, si avrà nell'angolo bac quello fatto dai due piani verticali.

Per determinare sulla tavoletta il punto che trovasi sulla verticale di un altro dato del terreno si traguarda per un filo a piombo, perpendicolarmente ad un lato della tavoletta, il punto dato; si fa piantare un finissimo ago, a cui siasi fatta una testa con cera lacca, nel piano che passa pel filo a piombo e pel punto del terreno; si fa lo stesso riguardo al lato adiacente della tavoletta, e se l'ago non trovasi nel nuovo piano determinato dal filo a piombo e dal punto del terreno, vi si trasporta: ripetendo alcune volte la medesima

operazione si perverrà con non molta fatica a trovare un punto posto nei due piani verticali, epperciò nella loro comune intersecazione, che è la verticale del punto dato del terreno. Si adopera anche allo stesso fine un triangolo rettangolo privo di un cateto, che porta sospeso all'estremità dell'ipotenusa un filo a piombo. In pratica occorre più spesso di dover sovrapporre un punto della tavoletta ad un punto del terreno, ciò che si eseguisce in un modo poco diverso dal precedente, trasportando cioè tutta la tavoletta invece di trasportare il solo ago: del resto un leggero errore nella sovrapposizione non può dar luogo ad errori sensibili nel rilevamento, a meno che questo si faccia ad una scala di poco minore della naturale.

28. **Metodi di rilevamento colla tavoletta.** — I metodi di rilevamento colla tavoletta non differiscono da quelli già descritti trattando del grafometro se non nel modo di esecuzione, vale a dire, che se con questo si misurano gli angoli sul terreno e quindi si costruiscono al tavolino, colla tavoletta si copiano immediatamente senza misurarli, come segue:

1.° *Metodo d'irradiamento.*

Fatta stazione in un punto *O* (fig. 48) del terreno, ed ivi orizzontato lo specchio della tavoletta, si pianti un ago in un punto *o*, si segni sul terreno con un piuolo il punto *O*, intersecazione della verticale del punto *o* col suolo, e facendo girare la diottra intorno al punto *o* si dirigano col cannocchiale delle visuali a tutti i punti *A*, *B*, *C*, *D*, *E*, *F* da rilevarsi, tracciando successivamente le proiezioni di queste visuali sul foglio, come già abbiam detto in simile circostanza; poscia misurate le distanze *OA*, *OB*, *OC* ecc. colle canne o colla stadia, si portino in scala sul disegno; si uniscano finalmente i punti *a*, *b*, *c*, ecc. così determinati.

Si avrà evidentemente nel poligono *abcdef* una figura simile a quella del terreno *ABCDEF*.

2.° *Metodo d'intersecazione.*

Fatta stazione in un punto *O* (fig. 49) del terreno, orizzontato lo specchio, e determinato su questo il punto *o* sulla verticale del punto *O*, si dirigano colla diottra delle visuali a tutti i punti *A*, *B*, *C*, ecc. del terreno da rilevarsi, e ad un punto *P*, sul quale si dovrà poscia stazionare: si misuri la distanza *OP*, e si porti in scala sul disegno in *op*. Ciò fatto si trasporti la tavoletta sul punto *P* e vi si disponga in modo che il punto *p* dello specchio si trovi in *p'* nella verticale del punto *P*, ciò che dicesi fare la *sovrapposizione*, e che la retta *o' p'* già segnata sul foglio sia nel piano verticale condotto per l'allineamento *OP*, ciò che si chiama *orientarsi a punto indietro;* quando si sarà ottenuto l'orientamento è facile riconoscere che i raggi, che si erano segnati sulla tavoletta nella stazione *O*, sono ora paralleli alle direzioni che avevano in quella stazione, e che se dal punto *p'* si dirigono agli stessi punti del terreno le nuove visuali *p'A*, *p'B*, *p'C*, ecc., queste intersecheranno le prime nei punti *a*, *b*, *c*, ecc., e la figura *abcde* formata dalle linee che uniscono tali intersecazioni, sarà simile a quella del terreno *ABCDE*.

3.° *Metodo di camminamento.*

Collocata la tavoletta sopra uno dei punti da rilevarsi, secondo le norme precedentemente stabilite, per esempio sul vertice *A*. (fig. 50), si diriga una visuale al punto *B*, si faccia misurare la distanza *AB*, e si porti in scala in *ab*: si trasporti la tavoletta sul punto *B*, ed orientata questa sul punto *A*, il lato *b'a'* che rappresenta il lato *BA* del terreno, si troverà nel piano verticale di questo lato; dalla

stazione *B* diretta una visuale al punto *C* si determini $b'c$ corrispondente al lato *BC*, come si è determinato ab; si vada poi a fare stazione colla tavoletta in *C*, e si orienti sul punto *B*; si diriga la visuale *CD* e si determini $c'd$: si continui in tal modo l'operazione facendo stazione su tutti i punti da rilevarsi. Giunti all'ultima stazione *E* onde determinare nuovamente il punto *a* corrispondente al primo punto *A*, su cui si è fatta la prima stazione, i due punti rappresentativi del punto *A* dovranno coincidere e formarne un solo. Se ciò non accadesse, e che l'errore non fosse compreso fra i limiti della tolleranza fissata al rilevamento, ove non si potesse supporre di avere in un solo sito commesso un tale errore, ciò che generalmente non è da presumersi, e se l'errore trovato derivasse dall'accumulamento di tanti piccoli errori commessi in ciascuna stazione, come d'ordinario avviene nelle operazioni di puro graficismo, converrà ripetere da capo l'operazione: è perciò necessario di non attendere a verificare l'operazione ch'essa sia compiuta, ma ogni volta che si fa una nuova stazione, oltre all'orientarsi a punto indietro, conviene dirigere diverse visuali ai punti già rilevati che da essa stazione si possono comodamente scoprire, osservando se la linea fiduciale della diottra che è applicata al punto corrispondente a quello su cui si fa stazione, passa pel punto rappresentativo di quello a cui si dirige la visuale.

29. **Norme generali pel rilevamento d'un tratto di terreno colla tavoletta.** — Ripetiamo ora l'osservazione già fatta sui tre precedenti metodi di rilevamento, vale a dire che nel rilevamento di un piano è il più delle volte impossibile servirsi esclusivamente di un solo metodo, sia perchè sarà quasi sempre impossibile scoprire tutti i punti da rilevarsi da uno

o da due punti, oppure di fare stazione sopra ognuno di essi, sia ancora perchè volendo applicare il solo metodo d'intersecazione, che sembra il più comodo, si dovranno solo tener per buone quelle intersecazioni che si fanno presso a poco ad angolo retto, condizione questa che ben di rado si potrà ottenere sul terreno.

Conchiudiamo dunque che a voler rilevare un tratto di terreno impiegando la sola tavoletta si dovrà far il rilevamento totale per camminamento, ed in ciascuna stazione rilevare per irradiamento i punti circostanti, misurando i raggi colle canne o colla stadia, serbando il metodo per intersecazione al rilevamento dei punti pei quali le intersecazioni si fanno ad angoli pressochè retti, o che non è possibile determinare colla misura diretta o colla stadia.

Se il rilevamento dovesse abbracciare un tratto alquanto esteso di terreno, non converrebbe farlo col solo mezzo della tavoletta, ma sarebbe necessario di fissare prima d'ogni cosa sui fogli del disegno alcuni punti, nei modi che verranno a suo tempo indicati, i quali punti, oltre al servire al collegamento delle varie parti del rilevamento, servono pure all'orientamento dei fogli, ed alle continue verificazioni che si vanno facendo di mano in mano che il lavoro progredisce.

Accade frequentemente che uno di tali punti, quantunque abbia il suo rappresentativo su di un foglio diverso da quello disteso sullo specchio della tavoletta, possa tuttavia servire alla verificazione per essere chiaramente visibile dal tratto di terreno su cui si opera, mentre non lo sono quelli che vengono rappresentati dai punti posti sulla tavoletta.

In questo caso si può procedere nel modo seguente:

Sieno MN ed NP (fig. 51) due fogli attigui, il primo dei quali contenga la proiezione a del punto A del terreno,

ed il secondo sia quello collocato sulla tavoletta: dopo di aver disposti i due fogli in modo che il lato inferiore del primo coincida col lato superiore del secondo, dal punto *a* si conduca una retta che tagli il lato *NQ* e si prolunghi sul foglio *NP* finchè si abbia $a'r = ar$. Se ora, dopo di aver orientato la tavoletta in un punto *C* del terreno, si vuole verificare l'operazione mediante il punto *A*, si unisca il punto *a'* col punto *c*, rappresentativo di *C*, si divida *a'c* in due parti uguali in *s*, e finalmente dal punto *c* si tira *ct* parallela alla *sr*, questa parallela, prolungata, passerebbe evidentemente pel punto *a* proiezione di *A*; laonde se collocando la linea fiduciale della diottra contro la retta *ct*, si scopre il centro della reticola del cannocchiale sul punto *A*, si potrà conchiudere non essere occorso verun errore sensibile nel rilevamento fino alla stazione *C*. Se il punto *A* è a ragguardevole distanza dal punto *C*, non sarà necessario di segnare la *ct* parallela ad *sr*, ma collocando lo spigolo della diottra contro quest'ultima linea, si dovrà vedere col cannocchiale il punto *A*, come si vedrebbe se lo stesso spigolo fosse collocato sulla *ct*.

30. **Declinatorio.** — Abbiamo di già parlato dell'orientamento della tavoletta a punto indietro: generalmente si dice che un piano è orientato quando, essendo orizzontale, *una delle linee ch'esso contiene è parallela a quella del terreno che rappresenta, e che i punti estremi delle due rette sono disposti nello stesso ordine.* Un piano già disegnato sulla tavoletta, o che si sta disegnando, si può orientare in due modi: a punto indietro, o mediante il *declinatorio*. L'orientamento a punto indietro è il più difficile ad ottenersi e nello stesso tempo il più preciso; l'altro deve soltanto impiegarsi quando non è possibile di fare altrimenti.

Il declinatorio è una bussola rettangolare (fig. 52), i cui lati maggiori sono paralleli al diametro che passa per la graduazione segnata *o* sopra uno dei due archi descritti nel fondo della bussola; talvolta il declinatorio è a circolo intiero, e si fissa allora invariabilmente alla tavoletta.

Nessuno ignora la proprietà dell'ago calamitato di rivolgere costantemente una delle sue punte verso il nord quando è sospeso liberamente nello spazio pel suo centro di gravità; la direzione di un ago calamitato non è però uguale per tutti i tempi e per tutti i luoghi, ma varia da un'epoca ad un'altra e da un luogo all'altro, in modo irregolare, e secondo una legge fino ad ora ignota. Le variazioni per altro non giungono a qualche grado se non dopo alcuni anni; per uno spazio di tempo più o meno breve, per alcuni mesi, ad esempio, ed in un tratto di paese non molto esteso, le direzioni di tutti gli aghi calamitati si possono considerare come parallele.

Il piano verticale determinato dalla retta che unisce le due estremità di un ago calamitato sospeso come abbiam detto, chiamasi *meridiano magnetico*, per distinguerlo dal *meridiano vero* di un luogo, che è quel piano che passa pei poli della terra, e per un luogo determinato, ciò che meglio si vedrà in appresso. L'angolo che fa il meridiano magnetico col meridiano vero dicesi la *declinazione dell'ago calamitato*; conoscendo quest'angolo è facile determinare la direzione del meridiano vero, almeno approssimativamente.

La declinazione dell'ago magnetico era per Torino nell'anno 1841 di 18° 2′ verso occidente, vale a dire, che la punta dell'ago rivolta al nord declinava verso occidente in modo che il meridiano magnetico faceva col meridiano vero un tale angolo: verso la metà di luglio del 1853, la declinazione era di 17° 37′, ed alla metà del dicembre succes-

sivo non aveva ancora variato in un modo sensibile. L'ago magnetico và poi soggetto a periodiche oscillazioni annue, e ad altre giornaliere, le quali però non sono da considerarsi nell'orientamento de' piani.

Per orientare lo specchio della tavoletta col declinatorio si procede nel seguente modo: facendo la prima stazione sul terreno, dopo di aver orizzontato lo specchio, si collochi su di esso il declinatorio e si rivolga in modo che l'ago calamitato si trovi precisamente sul diametro o°, ed allora si segni lungo il lato maggiore del declinatorio una lineetta sullo specchio; questa linea indicherà la direzione del meridiano magnetico, e quando si farà un'altra stazione si otterrà l'orientamento collocando nuovamente lo stesso lato del declinatorio che ha servito al tracciamento della linea predetta, su questa linea, e facendo poscia girare lo specchio finchè l'ago magnetico cada sul diametro o°.

Quando si vuole orientare un rilevamento a ***pien nord***, o secondo il meridiano vero, non deve più disporsi il declinatorio in guisa che l'ago calamitato si trovi sul diametro o°, ma che coincida invece con quello che passa per la divisione indicante il numero di gradi e parti di grado della declinazione, all'epoca e nel luogo in cui si effettua l'operazione.

Non potendosi correggere la diottra dell'errore di collimazione, e volendosi orientare il piano a pien nord, converrà tenerne conto, onde poter poi variare l'orientamento di una quantità angolare eguale a quella di tale errore.



LEZIONE SETTIMA.

QUESTIONI PLANIMETRICHE RISOLTE COLLA TAVOLETTA. BUSSOLA TOPOGRAFICA.

(letta il 7 febbraio 1854.)

Signori,

Accade sovente che i punti del terreno sieno posti, relativamente ad altri punti già rappresentati sulla tavoletta, in condizioni tali, che a volerne determinare le proiezioni sul piano debbansi risolvere diverse questioni. Perciò termineremo l'esame della tavoletta pretoriana coll'occuparci della risoluzione di alcune di tali questioni; di quelle cioè che più frequentemente si hanno a risolvere.

31. **Problemi che si possono risolvere sul terreno impiegando la tavoletta.** — Le questioni delle quali tratteremo si possono ridurre a due distinti problemi; cioè: 1° *determinare sulla tavoletta la proiezione di un dato punto del terreno:* 2° *trovare sulla tavolettà il punto rappresentativo del punto del terreno sul quale si fa stazione.* Ciò che distingue questi due problemi l'uno dall'altro si è, che nel primo il punto del terreno si suppone preventivamente fissato, mentre nel secondo problema il punto del quale si cerca il rappresentativo è uno di quelli del terreno che trovansi sotto lo specchio della tavoletta, e non viene fissato con un piuolo conficcato nel suolo, se non dopo di averne trovata la proiezione su di essa.

I. *Date le proiezioni* a *e* b (fig. 53) *di due punti* A *e* B, *determinare la proiezione* c *di un terzo punto* C *del terreno.*

Primo caso. Potendosi far stazione in A *e* B.

Sol. Facendo stazione in *A* e *B*, colle norme già più volte indicate, si determina la proiezione *c* per intersecazione.

Secondo caso. Potendosi fare stazione in A *e misurare* A C. (fig. 54).

Sol. Fatta stazione in *A*, dopo di aver orientata la tavoletta sul punto *B*, si determina *c* col metodo d'irradiamento.

Terzo caso. Potendosi stazionare in A *e misurare* B C. (fig. 55).

Sol. Si fa stazione in *A* orientando la tavoletta sul punto *B*; si dirige la visuale *A C*, e dopo di aver misurata la distanza *B C*, fatto centro in *b*, con un raggio eguale a questa distanza ridotta alla scala del disegno, s'interseca *A C*: l'intersecazione *c* sarà la proiezione cercata.

L'arco descritto dal punto *b*, con un raggio *b c*, interseca ordinariamente la proiezione della visuale *A C* in due punti *c* e *c'*, e risultano allora due triangoli *a c' b*, *a c b*, il primo de'quali ha l'angolo in *c'* ottuso, e l'altro hà l'angolo in *c* acuto; è adunque necessario di riconoscere se l'angolo *A C B* sia ottuso oppure acuto. Se l'arco fosse tangente ad *a c*, l'angolo *c* sarebbe evidentemente retto, e si avrebbe una sola soluzione.

Quarto caso. Potendosi fare stazione in A *e* C, *ma non essendo possibile di misurare* A C. (fig. 56).

Sol. Si faccia stazione in *A*, si orienti la tavoletta sul punto *B*, e si tiri il raggio *A C* segnandone la proiezione sullo specchio: si porti poscia la tavoletta in *C*, si collochi in modo che un punto *c'*, preso ad arbitrio sul raggio *a c'*, si trovi sulla verticale del punto *C*, e si orienti sul punto *A*;

si conduca da c' una visuale al punto B, questa visuale taglierà in un punto b' la ab rappresentativa di AB, ed il triangolo $ac'b'$ sarà simile al triangolo ABC; finalmente dal punto b si tiri la bc parallela a $b'c'$: sarà evidentemente c il punto cercato rappresentativo del punto C.

Quinto caso. Non potendosi fare stazione nè in A *nè in* B, *ma soltanto in un punto della linea che unisce i due punti* A *e* B, *ed in* C (fig. 57).

Sol. Si faccia stazione in un punto D sulla retta che unisce i punti A e B, e dopo di aver orientato la tavoletta su A e B, e di aver segnato sullo specchio il punto d in cui la verticale del punto D interseca lo specchio, si collimi al punto C del terreno; si trasporti poscia la tavoletta in C, come precedentemente, e si orienti sul punto D: da c' si dirigano due visuali ai punti A e B; le loro proiezioni intersecheranno la ab in a' e b', ed il triangolo $a'b'c'$ sarà simile al triangolo ABC; finalmente conducendo dai punti dati a e b due parallele, una ad $a'c'$, e l'altra a $b'c'$, esse s'intersecheranno nel punto c, che sarà la proiezione sulla tavoletta del punto C. Se si desiderasse anche di avere la proiezione del punto D sul piano, basterebbe di condurre pel punto c una parallela alla $c'd'$, e si avrebbe in d la proiezione di D.

II. *Dati* a *e* b *rappresentativi di* A *e* B, *determinare il punto di stazione in un luogo stabilito.*

Primo caso. Potendosi fare stazione in A *e* C. (fig. 58).

Sol. Fatta stazione in A ed orientata la tavoletta sul punto B, si faccia collocare in C, nel sito ove si deve poscia stazionare, una palina; si operi quindi come nel 4° caso del problema precedente, ma invece di condurre da un punto c', preso arbitrariamente sulla ac', una visuale al punto B, si

faccia girare la diottra intorno al punto *b* finchè si scopra *B* per mezzo del cannocchiale; se si traccia allora la proiezione della visuale diretta da *b* in *B*, questa intersecherà la *ac'* in un punto *c*, che sarà evidentemente la proiezione sulla tavoletta del punto di stazione *C*, che si potrà segnare, come altra volta si è detto, sul terreno con un picchetto.

Secondo caso. Potendosi far stazione fra A *e* B, *ed in* C. (fig. 59).

Sol. Si fa stazione, come nel 5° caso del 1° problema, in un punto *D* della retta *AB*; si dirige una visuale alla palina collocata verticalmente in *C*, e si trasporta poscia in questo luogo la tavoletta; orientata che si sarà questa da *C* su *D*, la *ab* sarà parallela alla sua corrispondente del terreno *AB*: se ora si dirigono due visuali ai punti del terreno *A* e *B*, collocando ordinatamente lo spigolo della diottra contro i loro rappresentativi *a* e *b*, le proiezioni di dette visuali sul piano verranno ad intersecarsi in un punto *c* che sarà la proiezione del punto di stazione cercato.

È facile riconoscere che per un rilevamento eseguito alla scala di 1 a 2000, od anche a quella di 1 a 1000, le risoluzioni del 4° e 5° caso del primo problema si possono ridurre a quelle dei due precedenti casi del secondo problema.

In fatti non sarà difficile il collocare la tavoletta sul terreno in modo che la distanza orizzontale del punto *C* del medesimo, a cui si è collimato dalla stazione *A*, al punto di stazione determinato con questo secondo metodo, non sia maggiore di un decimetro; ora un decimetro è alla scala di 1 a 2000 rappresentato da un mezzo decimillimetro, e a quella di 1 a 1000 lo è da un decimillimetro, quantità queste al certo non apprezzabili: perciò in un rilevamento fatto ad una scala minore di quella di 1 a 1000,

i due precedenti problemi si possono considerare come identici. È tuttavia necessario di non confonderli nei rilevamenti che si fanno ad una scala maggiore di quella di 1 a 1000.

Terzo caso. Non potendosi stazionare se non in C. (fig. 60).

Fatta stazione in *C* ivi si orienti la tavoletta col declinatorio: poscia facendo girare successivamente la diottra intorno ai punti *a* e *b*, si dirigano ordinatamente due visuali ai punti *A* e *B*; le proiezioni delle due visuali determineranno colla loro intersecazione il punto *c* richiesto. Questo ultimo modo di determinare il punto di stazione non può dare che una mediocre approssimazione.

Il metodo fin quì descritto per determinare il punto di stazione, dicesi di *ritaglio* o d'*intersecazione inversa.*

III. *Si conoscono le proiezioni* a, b, c *di tre punti* A, B *e* C (fig. 61) *del terreno, determinare la proiezione di un quarto punto D, sul quale si fa stazione, e da cui si possono scoprire gli altri tre.*

Sol. Collocato lo specchio orizzontalmente sul punto *D* del terreno e segnata sul medesimo l'intersecazione della verticale del punto *D*, si dirigano col cannocchiale delle visuali ai tre punti *A*, *B*, *C*; si facciano poscia rispettivamente sulle rette *ab* e *bc*, che uniscono due a due sullo specchio i punti *a*, *b* e *c*, due segmenti di circoli capaci degli angoli *ADB* e *DBC*; le due circonferenze *o*, *o'* si taglieranno nel punto *b* e in un altro punto *d*, che sarà evidentemente la chiesta proiezione sulla tavoletta del punto *D*.

Questa soluzione è impossibile quando i quattro punti cadono tutti sulla circonferenza di uno stesso circolo, e non è accettabile in pratica tutte le volte che le intersecazioni delle due circonferenze si fanno troppo obbliquamente.

La soluzione della seguente questione è pure applicabile alla presente ogni qualvolta la ragione della scala del rilevamento non sia maggiore di $^1/_{1000}$.

IV. *Date le proiezioni* a, b *e* c *di tre punti* A, B *e* C *del terreno, determinare il punto di stazione in un luogo designato* (fig. 62).

Sol. Il problema si risolverebbe immediatamente se si potesse pervenire ad orientare la tavoletta nel sito ove si fa stazione; poichè allora facendo passare una visuale pel punto *A* e pel suo rappresentativo *a*, un'altra per *B* e *b*, ed una terza per *C* e *c*, le proiezioni di queste tre visuali verrebbero infallantemente ad incontrarsi nel punto unico *d*, che sarebbe il punto cercato. Il problema si riduce dunque a quest'altro: *Orientare la tavoletta in un luogo dato, da cui si possono scoprire tre punti già determinati sul piano collocato sulla medesima, senza far stazione in nessuno de' punti dati.*

1ª. *Soluzione.* Si potrebbe far stazione nel sito in questione, ed ivi orientare la tavoletta col declinatorio, ma orientando in tal modo la tavoletta, le proiezioni delle tre visuali sovraccennate verranno difficilmente ad incontrarsi in un solo punto, ma risulterà quasi sempre un piccolo triangolo e si dovrà allora prendere per proiezione del punto di stazione il centro di tale triangolo, e questo punto sarà così determinato solo approssimativamente: il seguente metodo è più esatto.

2ª. *Soluzione.* Si orizzonti lo specchio della tavoletta *M' N'* (fig. 62) nel sito ove si vuol stazionare, e quivi orientato presso a poco il piano posto su di esso, si collimi successivamente a ciascuno dei tre punti *A*, *B* e *C*, collocando nel dirigere le singole visuali la linea fiduciale contro ognuno de' punti *a*, *b* e *c*, rappresentativo di quello a cui si collima.

Le tre visuali, essendosi fatto l'orientamento ad occhio, s'intersecheranno rispettivamente due a due determinando un triangolo 1-2-3; ciò che indicherà doversi correggere l'orientamento: se ora colla vite di richiamo, di cui deve essere munita ogni tavoletta, si dà un dolce movimento orizzontale allo specchio facendole prendere un'altra posizione $M'' N''$, e quindi si ripete la precedente operazione, si troverà un altro triangolo 1'-2'-3', più piccolo o più grande del primo; nel primo caso si conchiuderà essersi mosso lo specchio nel vero senso per giugnere all'orientamento del piano; nell'altro caso si conoscerà doversi fare il movimento in senso contrario.

Continuando a muovere convenientemente lo specchio, e ripetendo le osservazioni, si otterranno altri triangoli 1''-2''-3'', ecc., sempre più piccoli, e si finirà per trovare una posizione $M N$ dello specchio, tale che le intersecazioni delle tre rette si faranno tutte in un sol punto d che sarà quello cercato, e si potrà allora segnare sul terreno il punto di stazione D rappresentato dal punto d.

Potrebbe darsi che dopo di aver fatto girare lo specchio fino ad avere la posizione $M''' N'''$, e di aver tracciate le proiezioni delle visuali dirette ai tre punti A, B e C, ne risultasse un triangolo I-II-III, coi vertici rivolti in senso opposto a quello dei vertici del triangolo primitivo 1-2-3; ciò indicherebbe che l'ultimo movimento dato allo specchio fu troppo forte, e si dovrà tornare indietro ripetendo quanto si è più volte indicato.

Se si uniscono rispettivamente fra loro i punti 1, 1', 1''... I; 2, 2', 2''... II; 3, 3', 3''... III; si otterranno tre curve, le quali si intersecheranno nel punto di stazione.

32. **Bussola topografica.** La proprietà dell'ago calamitato,

di cui si è parlato trattando del declinatorio, ha fatto immaginare la *bussola topografica* della quale ci serviamo come di un goniometro.

La bussola topografica (fig. 63) ha come il declinatorio la forma di un parallelepipedo rettangolo, ma invece di avere nel suo fondo due soli archi di circolo, ha un circolo intero graduato di mezzo grado in mezzo grado, in modo che il diametro che ha ne' suoi estremi le divisioni 0° e 180°, è parallelo a due dei lati del parallelepipedo, e ad uno di questi due lati è annesso un cannocchiale, il cui asse è mobile in un piano perpendicolare al fondo della bussola, e parallelo al predetto diametro. La divisione segnata *o* ha pure la lettera *N*, per indicare il nord, il punto diametralmente opposto ha la lettera *S*, per segnare il sud, ed alle estremità del diametro perpendicolare a quello che passa per questi due punti hanvi le graduazioni 90° e 270°, e le due lettere *E*, ossia est, ed *O*, ossia ovest; la graduazione 90° colla lettera *E* si trova dalla parte del cannocchiale.

Il fondo della bussola si mette orizzontale con meccanismi analoghi a quelli che s'impiegano per l'orizzontamento dello specchio della tavoletta e del semicerchio del grafometro.

Le condizioni a cui deve soddisfare una bussola topografica si possono ridurre alle seguenti:

1° *Il perno che sostiene l'ago calamitato deve trovarsi nel centro del circolo.*

2° *L'asse del cannocchiale deve muoversi in un piano parallelo alla faccia laterale del parallelepipedo contro la quale si effettua il suo movimento.*

3° *Questo piano deve essere perpendicolare al fondo della bussola.*

4° *La graduazione deve essere esatta.*

La prima condizione si può facilmente riconoscere con un compasso.

Si verificherà la seconda condizione facendo coincidere l'ago magnetico col diametro 0° – 180°, facendo collocare una palina a grande distanza nella direzione dell'asse del cannocchiale, poscia movendo orizzontalmente il piano della bussola intorno al suo asse di rotazione finchè abbia compiuto un mezzo giro, e riconducendo l'oculare all'occhio col far descrivere al cannocchiale un semicircolo, si osserverà pel cannocchiale se ancora si scopre la stessa palina; se ciò non ha luogo se ne farà collocare un'altra ad egual distanza della prima dallo stromento, ed una terza sulla metà della linea che unisce le due prime, si ricondurrà finalmente il filo verticale su quest'ultima palina, se il cannocchiale è suscettibile di tale rettificazione, e si ripeteranno dopo ciò le osservazioni.

Le due ultime condizioni si verificano nei modi già indicati trattando del grafometro.

Si fanno pure delle bussole che diconsi ad *indice mobile*, per distinguerle da quella precedentemente descritta, che chiamasi ad *indice fisso;* la differenza fra le due costruzioni consiste in ciò, che in quest'ultima il disco graduato movendosi col cannocchiale, gli angoli sono segnati dalla punta nord dell'ago, mentrechè nell'altra il disco è unito all'ago, e per segnare gli angoli si fa uso di un indice, che essendo unito alla parete interna del vuoto cilindrico, si muove col cannocchiale e fa conoscere gli archi descritti dal centro di questo.

33. **Misura dell'angolo che una retta del terreno fa col meridiano magnetico.** — Si collochi la bussola col suo centro nella

verticale che passa per un punto *A* (fig. 64) della retta data, si orizzonti il fondo della bussola, e col cannocchiale si diriga una visuale ad un punto *B* della medesima retta; il numero indicato dalla punta nord dell'ago calamitato sarà l'angolo *nAB* chiesto.

Se il punto a cui si è collimato è situato ad occidente del meridiano magnetico, l'angolo trovato sarà compreso fra 0° e 180; se è posto a levante della stessa linea, l'angolo si troverà compreso fra 180° e 360°; laonde la semplice lettura fa conoscere, non solo l'ampiezza dell'angolo, ma altresì la direzione della visuale rispetto al meridiano magnetico. Ciò dipende dall'ordine con cui procede la graduazione del disco della bussola.

34. **Trovare colla bussola sul terreno l'angolo fatto da due allineamenti.** — Fatta stazione sul vertice *A* (fig. 65) dell'angolo da misurarsi, si osservi l'angolo che ciascuno dei due allineamenti *AB*, *AC* fa col meridiano magnetico *ns* che passa pel punto di stazione; se i punti ai quali si collima nelle due osservazioni si trovano dalla stessa parte del meridiano predetto, l'angolo cercato *BAC* è eguale alla differenza degli angoli osservati *nAB*, *nAC*; se il meridiano del vertice passa fra i due allineamenti, l'angolo cercato sarà eguale alla somma dei due angoli osservati *CAn* + *nAB* (fig. 66).

L'eccentricità del cannocchiale, allorchè il centro di rotazione della bussola è al centro del disco graduato, può cagionare degli errori sensibili nella misura di un angolo se il punto a cui si collima è poco distante dallo stromento; infatti sia *CA* (fig. 67) una retta segnata sul terreno, *C* il punto di stazione, *A* il punto osservato, *CN* il meridiano magnetico, e sia *DA* la visuale diretta pel cannocchiale al

punto A: l'angolo da misurarsi sarebbe quello ACN, mentre invece si misura l'angolo $oCn = ABN$; ora nel triangolo ABC v'ha angolo $ABN = ACB + CAB$; l'errore commesso è dunque eguale all'angolo CAP, il quale sarà evidentemente tanto più piccolo quanto minore sarà il rapporto della distanza CP del centro C del disco all'asse del cannocchiale, alla distanza CA. Nel triangolo ACP rettangolo in P, misurate le CP ed AC, si può facilmente, mediante il calcolo trigonometrico, dedurre il valore dell'angolo A, e supponendo $AC = 0^m,1$, si troverebbe essere quest'angolo trascurabile finchè la distanza $AC > 25^m$, poichè per tale distanza v'ha presso a poco angolo $A = 0° 14'$, e ad una distanza doppia quest'angolo sarà di circa $7'$; ora impiegando la bussola non è possibile stimare gli angoli con un'approssimazione maggiore di un quarto di grado; adunque nei rilevamenti fatti con tale stromento finchè le distanze superano quelle di 25^m non è da tenersi conto degli errori risultanti dall'eccentricità del cannocchiale. Anzi a rendere meno sensibili tali errori, anche per distanze minori di 25^m, si colloca il centro di rotazione della bussola tra il centro del disco e l'asse del cannocchiale; infatti in questo caso l'angolo da misurarsi AON' si avvicina di più all'angolo misurato $ABN = oCn$, come è facile riconoscere.



LEZIONE OTTAVA.

RILEVAMENTO DE' PIANI COLLA BUSSOLA TOPOGRAFICA. TEODOLITE RIPETITORE.

(letta il 10 febbraio 1834.)

SIGNORI,

Il rilevamento de' piani si può eseguire colla bussola impiegando uno dei tre metodi già descritti, d'irradiamento, d'intersecazione e di camminamento; o meglio impiegando i tre metodi simultaneamente, come si farebbe colla tavoletta o con un goniometro qualsivoglia: viene però più spesso adoperata la bussola nel rilevare per camminamento le sinuosità di una strada, di un canale e simili; perchè è appunto in tali operazioni che la bussola presenta qualche vantaggio, permettendo essa di alternare le stazioni nei vertici della linea poligonale che si percorre.

35. **Rilevamento di un poligono mediante la bussola topografica.** — Dovendosi, per esempio, rilevare una figura $ABCDEF$ (fig. 68), si può operare nel seguente modo: fatta stazione colla bussola in A, uno de' vertici del poligono da rilevarsi, si misurino le inclinazioni dei lati AF ed AB sul meridiano magnetico NS, e le loro lunghezze; si trasporti la bussola in C, e si misurino gli angoli $N''CD$, $N''CB$, e le lunghezze dei lati CB e CD, e finalmente si venga a far stazione in E onde misurare gli angoli $N^{iv}ED$, $N^{iv}EF$, ed i lati ED, EF.

Raccolti che si sono sul terreno i dati necessari alla costruzione del piano, si può questo eseguire, deducendo dagli angoli osservati quelli fatti dalle linee del terreno fra loro, ciò che riduce la costruzione precisamente a quella che si fa nei rilevamenti eseguiti col grafometro. Ma in generale riesce più semplice e più spedito l'operare nel modo seguente:

Sia $ABCDEF$ (fig. 68) l'abbozzo di una figura rilevata sul terreno colla bussola, sul quale abbozzo sono notati tutti gli angoli stati osservati, e tutte le distanze che si son misurate. Si conduca sulla carta una retta ns, che deve rappresentare la direzione del meridiano che passa per uno dei punti in cui si è fatto stazione, per esempio, pel punto A; si scelga su questa retta un punto a rappresentativo di A; alla destra di an si costruisca col rapportatore grafico l'angolo $nab = NAB = 360° - 270° = 90°$, ed alla scala stabilita si faccia $ab = \frac{1}{m} AB$; in b si tiri una parallela ad ns, e su questa si costruisca l'angolo $n'bc = N'BC = BCS'' = 180° - 130° = 50°$, e si faccia $bc = \frac{1}{m} BC$; in c si conduca un'altra parallela alla ns, e si costruisca l'angolo $dcn'' = DCN''$: si continui simile serie di costruzioni finchè si sia chiuso il poligono; se si troverà che, dopo di aver fatto $ef = \frac{1}{m} EF$, riesca pure $fa = \frac{1}{m} FA$, il poligono si sarà chiuso esattamente, altrimenti sarà successo qualche errore o nella costruzione della figura o nel raccogliere i dati sul terreno.

Se nella figura che si vuol rilevare vi fosse tutto il perimetro, o parte soltanto di esso, composto di linee curve,

alla parte curvilinea EFA (fig. 68) si dovrebbe sostituire una o più linee rette EF, FA, ecc., le quali dovrebbero poi servire di basi per fare, collo squadro alla mano, il rilevamento delle parti di curva comprese fra gli estremi d'ognuna di esse.

Per non essere possibile di applicare nn verniere alla bussola, e per le continue oscillazioni dell'ago, gli angoli non si possono ottenere che coll'approssimazione d'un qnarto di grado circa: si ricorre perciò alla bussola allora soltanto che non credesi necessaria una grande precisione, e specialmente nel rilevare linee sinuose, le cui estremità sono di già fissate sul piano con metodi rigorosi.

A diminuire il più che si possa la inesattezza de' risultati, la lunghezza dell'ago calamitato non deve essere minore di un decimetro, altrimenti non si potrebbe graduare la circonferenza di mezzo in mezzo grado; ed i lati del rilevamento non devono risultare maggiori della metà dell'ago, o del raggio del circolo interno; perchè se tali lati riuscissero doppi o tripli della lunghezza della metà dell'ago, l'errore commesso nella stima dell'angolo cagionandone uno doppio o triplo nella lunghezza della linea compresa fra le estremità dei lati di esso angolo, questo errore non si potrebbe più trascurare. Per la qual cosa la lunghezza dei lati di un rilevamento fatto colla bussola dipende dalla scala del disegno: così se la scala fosse di 1 a 2000, i lati non potrebbero eccedere di molto i 100 metri; se la scala fosse di 1 a 5000, la lunghezza dei lati potrebbe portarsi fino a 250^m.

36. **Sistema di ripetizione degli angoli.** — I goniometri che finora abbiamo esaminati misurano gli angoli già ridotti all'orizzonte, più o meno esattamente, secondo che il diametro

del cerchio graduato è più o meno grande, le divisioni di questo più o meno moltiplicate, e secondo il rapporto esistente fra le divisioni del cerchio e quelle del verniere; ma non sarebbe possibile di ottenere col loro mezzo tutta la precisione che nelle operazioni dell'alta geodesia, ed in alcune pur anche della topografia si richiede; nemmeno se si moltiplicassero oltre il dovere le divisioni della circonferenza, perchè allora la difficoltà nel leggere gli angoli sarebbe causa di continui errori nella loro stima. A rendere trascurabili gli errori anche nelle più importanti operazioni serve il sistema *delle ripetizioni*, invenzione di *Gio. Carlo Borda* distinto matematico francese, fondato su ciò, che se si porta successivamente sopra una circonferenza graduata, a partire dal zero, un dato arco concentrico, fino a tanto che l'altro estremo di questo venga a cadere sopra una delle divisioni della circonferenza, o presso una di esse, l'ampiezza dell'arco si troverà dividendo il numero de' gradi percorsi pel numero delle volte che l'arco è stato portato sulla medesima, e l'errore fatto nella misura dell'arco sarà eguale all'errore totale diviso per quest'ultimo numero; si supponga, per esempio, la circonferenza divisa in 720 parti uguali, e che siasi raggiunta la 40ma divisione al di là della circonferenza intera, dopo di aver portato 8 volte un arco sulla periferia; quest'arco sarà evidentemente eguale a $\frac{760}{8}$ $= 95$ mezzi gradi, o $47^{\circ}\ 30'$; e supponendo che mancasse la metà di una delle divisioni per compiere il numero esatto di 40ª oltre alla circonferenza, l'errore sulla misura dell'arco sarebbe l'ottavo della metà di un mezzo grado, od $\frac{1}{32}$ di grado.

Non bisogna però credere che applicando il sistema delle ripetizioni degli angoli a qualsivoglia stromento, si possa sempre giugnere ad ottenere un egual grado di precisione, perchè, se ciò è teoricamente vero, in pratica il grado di precisione nella misura degli angoli dipende anche in gran parte dal grado di perfezione nella costruzione dello stromento che si adopera. Laonde se si applicasse il sistema di ripetizione ad uno squadro graduato o ad un grafometro, sarebbe inutile il ripetere con tali strumenti più di due o tre volte l'angolo.

37. **Teodolite ripetitore.** — Il *teodolite ripetitore* (fig. 69) oltre al servire alla misura esatta, col mezzo delle ripetizioni, degli angoli orizzontali, serve pure a misurare in pari modo gli angoli verticali. Esso è generalmente composto di due dischi concentrici formanti un solo piano AB, uno de'quali, l'esterno, ha tutta la sua circonferenza divisa in parti eguali, e l'altro contiene quattro vernieri I, II, III e IV posti fra loro ad angoli retti: i due dischi sono sostenuti da due perni, quello del disco interno è pieno, e l'altro è vuoto: i due perni potendo girare indipendentemente l'uno dall'altro, possono trasportare nella loro rotazione il solo disco interno od ambidue i dischi. La vite di pressione H è destinata a fissare il cerchio interno all'esterno, e quella I serve a fissare il circolo esterno: le due viti di richiamo h ed i servono ai piccoli movimenti di ciascuno dei due cerchi.

Sulla faccia superiore del disco interno hanvi due sostegni S, sui quali si appoggia il perno intorno a cui muovesi un cannocchiale CO, che mantiensi sempre in un piano perpendicolare al perno stesso, il quale è nel medesimo tempo l'asse di rotazione di un altro cerchio graduato MN detto cerchio *zenitale*, come quello formato dai due dischi sovra

descritti chiamasi cerchio *azimutale*, pei motivi che esporremo a suo tempo. La vite di pressione K serve a fissare il cerchio zenitale e nello stesso tempo anche il cannocchiale, e la vite di richiamo k serve ad imprimere ad entrambi i piccoli movimenti.

I due perni concentrici precedentemente indicati formano una colonna D sostenuta da tre braccia come le due E, F, ognuna delle quali è attraversata da una vite come le due V, V', atta a rendere orizzontale il cerchio azimutale, mediante un livello a bolla d'aria LL' costrutto in modo che si possa sospendere alle estremità dell'asse del cerchio zenitale. Al disotto de' due dischi, e ad uno de' lati della colonna, v' ha un secondo cannocchiale $C' O'$, che può muoversi alcun poco perpendicolarmente e parallelamente al cerchio azimutale. È ufficio di questo cannocchiale il dirigersi per tutto il tempo delle osservazioni in una stessa stazione, costantemente verso un punto in lontananza, onde riconoscere se nel corso delle osservazioni la colonna non si è mossa dalla primitiva sua posizione.

Il teodolite può anche avere una costruzione alquanto diversa da quella sin qui descritta; sarebbe perciò inutile il darne una più circostanziata descrizione, la quale non potrebbe tuttavia dare una giusta idea dello stromento se non si avesse davanti agli occhi.

38. **Verificazioni e rettificazioni del teodolite.** — Prima di misurare un angolo sul terreno col teodolite, bisogna assicurarsi che le seguenti condizioni sieno soddisfatte.

1° *Il livello a bolla d'aria deve avere il suo asse parallelo a quello del perno del cannocchiale mobile.*

2° *L'asse di rotazione del cannocchiale mobile deve essere parallelo al piano del cerchio azimutale.*

3° *L'asse ottico del cannocchiale deve muoversi in un piano perpendicolare al suo asse di rotazione.*

Per verificare e rettificare il livello, si metta il medesimo sul perno del cannocchiale mobile come si scorge dalla fig. 69, in modo che il prolungamento del suo asse passi al di-sopra di una delle viti E de' piedi dello stromento, e si muova questa vite finchè la bollicella d'aria venga esattamente nel mezzo del tubo in cui è racchiusa; si inverta quindi il livello sospendendolo sempre all'asse predetto: se il livello è parallelo a quest'asse la bolla continuerà a starsene nel mezzo: se ciò non succede, si corregga metà dell'errore colla vite del piede E, e metà con quella m del livello; ripetendo alcune volte l'operazione si perverrà ad ottenere la prima condizione.

Infatti, sia ab (fig. 70) la posizione orizzontale del livello, cd quella dell'asse del perno del cannocchiale prima della rettificazione, MN un piano orizzontale qualunque: il livello essendo orizzontale si avrà evidentemente $aP = bQ$, e se cd non è orizzontale, sarà $ac > o < bd$; sia $ac < bd$, invertendo il livello in modo che il suo piede bd venga ad occupare il posto del piede ac, e viceversa, il livello prenderà la posizione $b'a'$, e la bolla si porterà in b'; se ora mediante la vite Q si fa salire l'estremità a' del livello fino in b, l'asse cd prenderà la posizione orizzontale cd' ed il livello prenderà quella $b'b$ meno inclinata di $b'a'$: se dopo ciò, mediante la vite del livello, si abbassa questo da b' fino in a, il livello riprenderà la posizione orizzontale ab che prima aveva.

Per verificare la seconda condizione, dopo di aver ottenuto la prima, si faccia descrivere al disco interno un mezzo giro; se la bolla non abbandonerà il mezzo del livello non

vi sarà veruna rettificazione da farsi; in caso diverso si correggerà l'errore, metà colla vite E (fig. 69) del piede, e metà con quella p di uno dei sostegni dell'asse di rotazione del cannocchiale mobile.

Infatti sieno ab, cd (fig. 71) le posizioni orizzontali degli assi del livello e del perno del cannocchiale già fatti paralleli, MN un piano orizzontale qualunque, ed rs la posizione inclinata del piano dei due dischi: facendo fare un mezzo giro al disco interno, sb verrà ad occupare il posto di ar, e viceversa, cosicchè il livello prenderà la posizione inclinata $b'a'$, e l'asse di rotazione del cannocchiale quella ad essa parallela $d'c'$; se ora si accorcia, per esempio, il sostegno del cannocchiale $c's$ finchè c' discenda in d, e colla vite del piede Pr, si solleva l'estremo d' dell'asse di rotazione predetto fino in c; quest'asse riprenderà la posizione cd che prima aveva, il livello ritornerà in ab, ed il piano dei due dischi $r's$ si disporrà orizzontalmente.

La terza condizione finalmente si verifica osservando un punto posto a grande distanza, e dirigendo su di esso l'intersecazione de' fili della reticola; rovesciando quindi il perno in senso contrario, in modo che la sua parte superiore divenga inferiore, e che il cerchio zenitale, che prima era alla sinistra, venga a trovarsi alla destra dell'osservatore, senza che il cerchio azimutale si sposti, si riconosce se lo stesso punto, a cui si era da prima collimato, continua a scoprirsi all'intersecazione de' fili. Se l'asse ottico del cannocchiale non è perpendicolare all'asse di rotazione AB (fig. 72), ma è inclinato come MN, dopo il rovesciamento l'asse ottico prenderà la direzione $M'N'$, e l'angolo MOM' sarà doppio dell'angolo MOC. Se adunque si fa piantare una palina nella direzione NM, una seconda nella dire-

zione $N'M'$, ed una terza ad egual distanza dalle due prime, e mediante la vite del micrometro, si porta il centro di questo a battere sulla terza palina, rovesciando nuovamente l'asse di rotazione, il centro della reticola dovrà ancora battere sulla medesima. È bene osservare che non si giugne mai ad ottenere l'esatta rettificazione di uno stromento se non dopo ripetuti esperimenti.

39. **Misura degli angoli mediante il teodolite ripetitore.** — Disposta ogni cosa nei modi sovraesposti, vogliasi misurare l'angolo fatto da due piani verticali che passano per due punti dati del terreno e pel centro del cerchio azimutale. Dopo di aver reso orizzontale il piano di questo cerchio, si faccia coincidere il zero del verniere numero I con quello del disco esterno, si fissi a questo colla vite H (fig. 69) il disco interno, poscia si facciano girare i due dischi, finchè vengasi a scoprire col cannocchiale CD l'oggetto di sinistra; si fissi quindi il disco esterno colla vite I, e movendo il solo disco interno si collimi all'oggetto di destra; il zero del verniere che prima coincideva coll'origine della graduazione del disco esterno, si troverà ora distante dalla medesima di un arco che sarà la misura dell'angolo cercato.

Abbisognando di maggior precisione si ripeterà l'angolo nella seguente maniera: dopo di aver trovato l'angolo, come precedentemente si è detto, si rendano solidari i due dischi, e si muovano assieme finchè col cannocchiale superiore si scopra nuovamente l'oggetto di sinistra; un tale movimento trasporterà il zero della graduazione alla sinistra della primitiva sua posizione, di una quantità eguale all'arco che si era ottenuto; fissato poscia nuovamente il disco esterno, si riconduca il cannocchiale sull'oggetto di destra, il zero del verniere segnerà un arco doppio del primo: proseguendo in

tal modo le ripetizioni si perverrà ad un angolo triplo, quadruplo, ecc. di quello da misurarsi. Si avrà infine la misura cercata dividendo l'ultimo arco multiplo per il numero delle osservazioni che si saranno fatte. Suppongasi, per esempio, che siansi ottenuti i seguenti risultati:

	Angoli multipli.		*Angoli semplici.*
A.	79° 57′ 30″	. . . . . .	79° 57′ 30″.
2*A*.	159. 55. 10	. . . . . .	79. 57. 35.
3*A*.	239. 53. 00	. . . . . .	79. 57. 40.
4*A*.	319. 50. 20	. . . . . .	79. 57. 35.
5*A*.	39. 48. 00	. . . . . .	79. 57. 36.

Si conchiuderà essere l'angolo misurato di 79° 57′ 36″.

40. **Uso dei quattro vernieri del teodolite.** — La lettura dei quattro vernieri, che si fa solo nelle più importanti operazioni dell'alta geodesia, è destinata a correggere gli errori che potrebbero derivare da leggerissime imperfezioni nella graduazione, e si eseguisce nel seguente modo:

Si supponga che, posto il verniere numero I all'origine della graduazione, si legga

I verniere	0° 0′ 0″,	III verniere	179° 59′ 20″,
II »	90. 2. 30,	IV »	269. 58. 20.

Sommando separatamente gli eccessi e le deficienze trovate pei vernieri II, III e IV, ad uno, due e tre angoli retti, e diffalcando dal maggiore il minor risultato, si ottiene

II + 2′ 30″	III — 0′ 40″
III + IV — 2.′ 20	IV — 1.′ 40
Diff.ª + 0′ 10″	— 2′ 20″

Se non si ripetesse l'angolo, il quarto della differenza,

cioè $0' 2'', 5$, sarebbe ciò che si dovrebbe dedurre dalla misura trovata; se invece, come d'ordinario avviene, si fa una serie di osservazioni, per esempio, dodici, ed alla dodicesima si trova:

I	verniere	$12A$.	$981''$	$8'$	$50''$,
II	»	»	»	$12.$	40,
III	»	»	»	$9.$	10,
IV	»	»	»	$8.$	10.

Sommando le frazioni si avrebbe $38'\ 50''$, da cui sottraendo l'eccesso precedente, si avrà $38'\ 50'' - 10'' = 38'\ 40''$; prendendo finalmente la media si conchiuderebbe essere $12A \ldots 981^{\circ}\ 9'\ 40''$, ed $A = 81^{\circ}\ 45'\ 48'', 3$.

I quattro vernieri del teodolite dovrebbero, come già vi ho accennato, essere disposti ad angoli retti, ma ciò non succede mai esattamente, ed il metodo da noi impiegato nella stima dell'angolo mediante i quattro vernieri serve pure a correggere l'angolo definitivo degli errori originati dal difetto di perpendicolarità dei vernieri fra loro, errori detti di *ripartizione*.



LEZIONE NONA.

MISURA DELLE SUPERFICIE PIANE, DIVISIONE DELLE MEDESIME.

(letta il 14 febbraio 1834.)

SIGNORI,

Abbiamo fin qui veduto che nei rilevamenti de' piani si tien conto soltanto delle misure ridotte all'orizzonte; parimenti nell'agrimensura non si considerano che le proiezioni orizzontali dei terreni; perciò vuolsi intendere per superficie di un appezzamento quella della pianta naturale del medesimo.

L'attuale unità di misura agraria è l'*ara* o *decametro quadrato*, di 100 metri quadrati, il cui multiplo è l'*ettara* di 100 are od *ettometro quadrato*, ed il sottomultiplo è il *centiara* o *metro quadrato:* trattandosi della superficie di uno stato si prende d'ordinario per unità il *chilometro quadrato*.

41. Misura delle figure rettilinee, e geometriche. — La geometria elementare insegna a misurare le superficie dei parallelogrammi, dei triangoli, dei trapezi, dei circoli, ecc.; noi, dispensandoci dal dimostrare i teoremi della geometria concernenti la detta misura, ci faremo solo a passarli rapidamente in rivista.

1° *L'area d'un rettangolo o d'un parallelogrammo si trova moltiplicando la sua base per la sua altezza.* Si prende per base un lato qualunque, l'altezza è la distanza compresa fra la base ed il lato opposto alla medesima.

Essendo B la base ed A l'altezza, si avrà

$$Sup.\ rett. = A \times B\ .$$

2° *La superficie di un triangolo si ha facendo il prodotto della base per la metà dell' altezza.*

$$Sup.\ triang. = \frac{A \times B}{2}\cdot$$

3° *Si ottiene la superficie di un trapezio moltiplicando la semisomma de' lati paralleli per l' altezza.*

Essendo A l'altezza, B e b i lati paralleli, sarà

$$Sup.\ trap. = \frac{B + b}{2} \times A\ .$$

4° Un poligono rettilineo qualsivoglia potendosi sempre scomporre in triangoli, *se ne troverà l'area facendo la somma delle aree di tutti i triangoli in cui venne scomposto.*

5° Se il poligono è regolare se ne ottiène più semplicemente l'area *col moltiplicare il suo perimetro per la metà del suo apotema.*

Detto P il perimetro, a l'apotema, si ha

$$Sup.\ pol.\ reg. = P \times \frac{a}{2}\cdot$$

6° *L'area di un circolo è eguale al prodotto della sua circonferenza per la metà del suo raggio.*

Se C è la circonferenza ed R il raggio, sarà

$$Sup.\ circ. = C \times \frac{R}{2}\cdot$$

La circonferenza poi si trova *moltiplicando il diametro*

pel rapporto costante della circonferenza al diametro; chiamato, secondo l'uso, π tale rapporto, ne viene

$$Circonf. = 2\,\pi\,R;$$

d'onde $Sup.\ circ. = \pi\,R^2 = \frac{22}{7}R^2$,

o più esattamente $= 3,1416.\ R^2$.

7° *La superficie di una zona circolare si ottiene moltiplicando la circonferenza media per la larghezza della zona.*

Chiamati R ed r i raggi delle due circonferenze concentriche, la larghezza della zona sarà $R - r$, e si avrà

$$Sup.\ zona\ circ. = \pi\,(R + r)\,(R - r)$$
$$= \pi\,(R^2 - r^2)\,.$$

8° *La superficie di un settore circolare è eguale al prodotto dell'arco per la metà del raggio.*

Detta n l'ampiezza dell'arco, la superficie del settore sarà

$$Sup.\ sett. = \frac{n\,\pi\,R^2}{360}\,.$$

9° *L'area d'un segmento di circolo si conchiude sottraendo dall'area del settore quella del triangolo che ha il vertice al centro, e per base la corda.*

10° *L'area di un'elisse si trova moltiplicando il prodotto dei semiassi pel rapporto costante* π.

Essendo a e b i semiassi di una elisse, si avrà

$$Sup.\ el. = \pi\,a\,b.$$

11° *L'area d'una porzione di parabola* (fig. 73) *com-*

presa fra un arco MAN, *e una doppia ordinata* MN, *è uguale ai* $\frac{2}{3}$ *di quella del parallelogramma che risulterebbe conducendo una tangente* RS *all'arco, parallela alla doppia ordinata, e due parallele* MS, RN, *al diametro* AX, *per le estremità dell'arco.*

42. Scomposizione delle figure irregolari in altre calcolabili. — Gli appezzamenti non sono sempre circoscritti da linee rette, ed hanno raramente una forma geometrica; per cui è quasi sempre necessario di ricorrere alla loro scomposizione in figure direttamente calcolabili. Lo stromento più adatto a tale scomposizione o divisione, si è lo squadro agrimensorio, col quale si divide il terreno di cui cercasi la superficie in tanti triangoli e trapezi rettangoli che si calcolano immediatamente, senza che sia necessario di ricorrere alla costruzione grafica del rilevamento.

Il terreno da misurarsi potrebbe essere tutto o parte soltanto inaccessibile; in ambi i casi, alla parte inaccessibile si circoscrive uno o più rettangoli, un trapezio od un triangolo, e dall'area totale si sottrae la somma delle aree che non appartengono al terreno inaccessibile; la differenza sarà evidentemente la superficie di quest'ultimo.

43. Calcolo dell'area compresa fra una curva, una retta e due perpendicolari a questa. — Si è a suo tempo indicato come debbansi rilevare le parti curve de' perimetri (§ 20): ora diremo come si calcoli l'area compresa fra una curva, una retta e due perpendicolari a questa.

Sia da calcolarsi l'area compresa fra la curva *DC* (fig. 74), la retta *AB*, e le perpendicolari *AC* e *DB*: dopo di avere, a brevi distanze l'una dall'altra, innalzate le perpendicolari pm, $p'm'$, $p''m''$, ecc., si potrà considerare l'area totale

come divisa in tanti trapezi, che, calcolati separatamente, e quindi sommati daranno per l'area totale A, facendo

$$Ap = h,\ pp' = h',\ p'p'' = h'',\ \text{ecc.},$$
$$CA = p,\ pm = p',\ p'm' = p'',\ \text{ecc.},$$

$$A = h \times \frac{p+p'}{2} + h' \times \frac{p'+p''}{2} + h'' \times \frac{p''+p'''}{2} + \text{ecc.}$$

Se le perpendicolari fossero equidistanti, si avrebbe $h = h' = h'' = h'''$, ecc., d'onde risulterebbe

$$A = h \times \left(\frac{p}{2} + p' + p'' + p''' + \ldots + \frac{p^{(n)}}{2}\right).$$

Basterebbe, cioè, *moltiplicare la distanza fra due perpendicolari successive per la semi-somma delle due perpendicolari estreme aumentata della somma di tutte le altre.* Si vede da ciò quanto sia utile lo innalzare le perpendicolari a distanze eguali.

Se la retta AB fosse condotta per gli estremi D e C della curva (fig. 75), $\frac{p}{2}$ e $\frac{p^{(n)}}{2}$ sparirebbero, e la formola diverrebbe

$$A = h \times (p' + p'' + p''' + p^{\text{iv}} + \ldots).$$

Quando la curva ha la sua concavità rivolta verso la retta AB, come fin qui si è supposto, l'area trovata è alcun poco minore della vera, essendo essa mancante di tutti i piccoli segmenti determinati dalle piccole porzioni d'arco e dalle loro sottendenti; e se la curva presentasse alla retta la sua convessità, l'area risultante sarebbe alquanto maggiore.

44. Formola di Simpson. – A rendere il risultato del calcolo più prossimo al vero, allorchè la concavità è rivolta alla base, si è immaginato di considerare ciascuna coppia di

detti piccoli archi, come un solo arco di parabola, avente per diametro la perpendicolare che passa pel suo punto di mezzo, cosicchè la corda che sottende ciascuna coppia sia la doppia ordinata dell'arco parabolico. Questa ipotesi condusse alla seguente formola detta di *Simpson*, nella quale riteniamo le precedenti notazioni.

$$A = \frac{h}{3}(p + 4p' + 2p'' + 4p''' + \ldots\ldots + p^{(n)}).$$

La formola di Simpson darebbe un valore meno approssimato di quello che possa dare la prima, nel caso che la curva presentasse la sua convessità alla retta su cui si innalzano le perpendicolari, ed allora, onde avere tutta l'esattezza che dall'ultima formola si può sperare, converrebbe condurre una retta esterna CD (fig. 76), calcolare l'area compresa fra questa nuova retta e la curva, e diffalcare tale area da quella del trapezio $ABCD$: in generale però le curve che s'incontrano nei perimetri degli appezzamenti presentano le concavità ora da una parte, ora dall'altra, e la formola di Simpson non porgerebbe allora nessuna utilità, ed anzi riuscirebbe d'imbarazzo per essere troppo complicata; laonde possiamo conchiudere essere il primo metodo il solo da ammettersi in pratica.

45. **Aree delle strade, dei canali, e simili; dei terreni rilevati colle sole canne, coi goniometri, o colla tavoletta.** — I terreni sono ben spesso intersecati da strade, canali, fossi e simili, che debbonsi alcune volte calcolare separatamente, e la cui larghezza è o si può supporre costante in tutto il loro sviluppo; egli è necessario perciò che chi voglia trovare l'area totale di un tratto di terreno intersecato da simili striscie, e composto di diversi appezzamenti, e le aree parziali di tutte le

figure che lo compongono, sia in grado di calcolare l'area di una zona compresa fra due linee parallele, o quasi parallele, poligonali o curve in parte, o in tutta la loro estensione. Debbasi, ad esempio, trovare l'area della zona compresa fra le due linee $ABCDE$, $abcde$ (fig. 77); in questo, ed in ogni altro caso simile, si potrebbe calcolare l'area totale $ABCDE$, e l'interna $abcde$, poscia dalla prima diffalcare la seconda; ma riesce assai più spedito, e sempre abbastanza esatto, benchè non sempre affatto geometrico, il moltiplicare lo sviluppo medio $mnpqr$ delle due linee per la larghezza della zona, se è uniforme, o per la larghezza media, se questa varia solo leggermente; in caso diverso converrà scomporre la zona in trapezi ed in triangoli come scorgesi dalla fig. 78.

Ove s'intraprendesse la misura di una superficie colle sole canne metriche, o colla catena metrica, verrebbe essa divisa in triangoli, de' quali si misurerebbero i tre lati e si calcolerebbero le aree colla nota formola

$$A = \sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)},$$

in cui p indica il semiperimetro del triangolo che si vuol calcolare, ed a, b e c ne sono i tre lati.

Nei rilevamenti fatti coi goniometri, se non si hanno immediatamente tutti i dati necessari al calcolo della superficie, si ha però sempre ciò che occorre per ottenere quelli che mancano, come si farà manifesto quando si saranno esposti i principii della trigonometria; di maniera che si potrebbe pur anche in simili casi ottenere l'area senza costrurre geometricamente la figura sulla carta: in generale però, quantunque le formole alle quali si deve ricorrere per tali calcoli non sieno molto difficili, non essendo tuttavia tanto

semplici da poterle preferire alla ricerca delle aree de'triangoli e dei trapezi per mezzo delle basi e delle altezze, si comincia sempre dalla costruzione grafica del piano, sia che il rilevamento siasi eseguito colle sole canne, col grafometro o con altri stromenti; poscia mediante la riga e le squadrette si scompone il disegno in triangoli de'quali si misurano sulla scala col compasso le basi e le altezze, oppure si dividono le figure da calcolarsi in triangoli ed in trapezi, in un modo analogo a quello praticato nella misura diretta delle aree de' terreni mediante lo squadro agrimensorio, e si prendono le dimensioni col compasso sulla scala del disegno.

Calcolando le aree direttamente coi dati stessi rilevati sul terreno o mediante quelli dedotti dal calcolo, si ottengono risultati della massima esattezza, quando le misure sieno state eseguite colla dovuta accuratezza; non è più possibile ottenere tanta precisione se si calcola la superficie dopo di aver costrutto il piano, che è evidentemente il solo metodo che si possa impiegare nei rilevamenti fatti colla tavoletta.

Volendo infine calcolare l'area totale di un tratto di terreno composto di diversi appezzamenti, devonsi per maggior chiarezza notare i dati necessari al calcolo, o sopra un abbozzo o sul piano geometrico, se è stato preventivamente costrutto; le singole figure o *caselle*, nelle quali si è dovuto suddividere ciascun appezzamento, vanno distinte con numeri progressivi, o con lettere, ed il tutto devesi trascrivere sopra un *casellario* disposto in modo che sia possibile collocare in apposite colonne: 1° *il numero d'ordine o la lettera d'ogni casella;* 2° *le dimensioni lineari, o i due fattori dell'area di ognuna di esse;* 3° *le aree parziali delle caselle;* 4° *le aree di ciascun appezzamento.*

46. **Divisione della superficie.** — La divisione di una super-

ficie si può eseguire, o mediante il calcolo, o graficamente: la divisione grafica delle figure essendo però piuttosto geometrica speculazione che non operazione pratica, ci occuperemo soltanto della risoluzione numerica di alcune delle questioni che più frequentemente si hanno a risolvere; da queste sarà poi facile dedurre il modo di risolvere qualsivoglia altra questione analoga.

1° *Dividere un poligono in due parti proporzionali a due numeri dati mediante una retta condotta per un punto dato del suo perimetro.*

Sol. Sia P (fig. 79) il punto dato, e debbano le due parti stare tra loro :: $m : n$.

Si trovi in primo luogo l'area totale A, poscia si cerchi l'area di una delle due parti colla seguente proporzione,

$$m + n : m :: A : x = \frac{m}{m+n} A.$$

Dal punto dato P si abbassi una perpendicolare PQ su di un lato RM, sul quale si possa presumere che debbasi trovare l'altro estremo della dividente, e si calcoli l'area di una delle due parti determinate dalla retta PQ; sia

$a < \frac{m}{m+n} A$ quest' area, che supporremo essere quella della parte a sinistra; s'immagini un'altra retta PR, si calcoli l'area del triangolo rettangolo PQR, e sia quest'

area $b > \frac{m}{m+n} A - a$.

Ciò posto, è chiaro che la dividente cercata deve passare per un punto S posto fra Q ed R: per trovare questo punto si stabilisca la proporzione

$$b : \frac{m}{m+n} A - a :: QR : x = QS.$$

Si porti finalmente il valore trovato pel quarto termine di questa proporzione da Q in S, PS sarà la dividente cercata.

Non è difficile immaginarsi come dovrebbesi in modo analogo operare nel caso in cui le dividenti da condursi dal punto dato fossero più di una.

Esempio numerico. Per fissare le idee, sia l'area totale della figura $A =$ are 960, e debbasi questa dividere in due parti che stieno fra loro :: 3 : 5; si avrà in primo luogo

$$8 : 5 :: 960^{\text{are}} : x = \text{are } 600;$$

sia quindi $PQ = 250^{\text{m}}$, $a =$ are 520,

$$QR = 120^{\text{m}}, \; b = \text{are } 150;$$

si otterrà finalmente

$$150 : 80 :: 120^{\text{m}} : x = 64^{\text{m}}.$$

2° ***Dividere un poligono in più parti con rette condotte per un punto preso nell'interno di esso.***

Sol. Sia O (fig. 80) il punto dato, e debbasi dividere la figura in tre parti equivalenti.

Calcolata l'area A, ciascuna delle tre parti dovrà essere eguale ad $\frac{A}{3}$: si abbassino dal punto O le tre perpendicolari OP, OQ ed OR su tre lati della figura, tali che, ad occhio, si possa supporre l'area prossimamente da esse divisa nel modo richiesto; si calcoli poscia la parte compresa fra le perpendicolari OP ed OQ, e suppongasi che si sia trovato quest'area eguale ad $a < \frac{A}{3}$; si supponga quindi condotta la retta OB, e si cerchi l'area del triangolo

rettangolo BOQ, che supporremo maggiore di $\frac{A}{3} - a$; ciò posto si troverà QS colla proporzione

$$OQB : \frac{A}{3} - a :: BQ : x = QS.$$

Trovato il punto S, le due rette OP ed OS saranno due delle dividenti chieste: in un modo analogo si otterrà la distanza AT e la terza dividente OT.

3° *Dividere un poligono con parallele ad una retta data.*

Soluzione. Debbasi dividere il poligono $ABCDEF$ (fig. 81) in due parti nel rapporto $m:n$, con una parallela alla retta EF.

Trovata, nel modo sopra indicato, l'area $\frac{m}{m+n} A$ di una delle due parti, si tiri da un punto del perimetro, per esempio, da A, una parallela alla EF, di maniera che si possa ad occhio presumere che tale parallela divida prossimamente la figura nel modo chiesto. Dopo ciò si calcoli l'area di una delle due parti, per esempio, di quella $ABCM$, e sia quest'area $a < \frac{m}{m+n} A$; si conduca poscia dal vertice G una nuova parallela alla EF, e si calcoli ancora l'area del trapezio risultante $AMNG$, che supporremo maggiore di $\frac{m}{m+n} A - a$.

Ora i lati AG ed MN del quadrilatero $AMNG$ possono essere fra loro paralleli, o più o meno convergenti; se sono paralleli, o quasi paralleli, si potrà facilmente trovare l'altezza RU del quadrilatero $AMKH = \frac{m}{m+n} - a$,

colla proporzione $AMNG : \frac{m}{m+n} A - a :: RS : x = UR$.

Se i lati AG ed MN sono sensibilmente convergenti, la proporzione precedente non può più sussistere, ma si potrà trovare l'altezza RU per tentativi nel seguente modo: dividendo l'area $\frac{m}{m+n} A - a$ per la lunghezza di AM, si otterrà l'altezza RT del rettangolo $AMpq >$ trap. $AMPQ$; se quindi si divide ancora la differenza fra le aree di questi due quadrilateri per la lunghezza della PQ, si troverà l'altezza TU di un nuovo rettangolo $QPkh$ che si potrà considerare come equivalente al trapezio $QPKH$, ed infine sarà l'altezza cercata $RU = RT + TU$.

Se poi i lati AG ed MN fossero molto convergenti, si troverebbe direttamente l'altezza RU del trapezio da aggiungersi alla parte $ABCM$, nel seguente modo:

Colla proporzione

$AM - GN : GN :: RS : x = OS$, si troverà l'altezza del triangolo ONG formato dal prolungamento dei predetti due lati; e dalla proporzione

$$\text{triang. } ONG : \text{triang. } OHK :: \overline{OS}^2 : x^2 = \overline{OU}^2,$$

si otterrà $OU = \sqrt{\frac{OHG \times \overline{OS}^2}{ONG}}$.

Trovato OU, si avrebbe infine $UR = OR - OU$.

Esempio numerico. Sia $A =$ ett. 8,75, e debbasi dividere nel rapporto di 3 : 4:

si avrà $\frac{m}{m+n} A = \frac{4}{7} \times$ ett. 8,75 = ett. 5.

Siavi quindi $a =$ ett. 4,

si troverà $\frac{m}{m+n} A - a = AMKH =$ ett. 1.

Sia quindi $AM = 260^m$, $GN = 200^m$, $RS, = 90^m$;

sarà $AMNG = 460^m \times 45^m =$ ett. 2,07,

e $GNKH = AMNG - AMKH =$ ett. $(2,07 - 1)$
$=$ ett. 1,07.

Si troverà poscia

$$60 : 200 :: 90 : x = OS = 300^m;$$

$$\text{triang. } OGN = 300^m \times 100^m = \text{ett. } 3,$$

$$\text{triang. } OHK = \text{ett. } (3 + 1,07) = \text{ett. } 4,07;$$

e finalmente

$$3 : 4,07 :: (300^m)^2 : x^2 = \overline{OU}^2,$$

ed $OU = 349^m, 42$; d'onde si dedurrà

$$UR = 390^m - 349^m, 42 = 40^m, 58.$$

4° *Ad una dividente tortuosa sostituire una retta.*

Sol. Volendosi alla linea di divisione AMB tortuosa (fig. 82), sostituire una linea retta AD che non alteri il rapporto fra le aree dei due appezzamenti adiacenti; si tiri una base AB, e si calcoli la differenza cagionata sulle aree delle due figure coll'assumere questa base per dividente, e trovato, per esempio, che quella a sinistra perderebbe una parte a di superficie, si abbassi dal punto A sul lato BE la perpendicolare AC, e si calcoli l'area b del triangolo rettangolo risultante ABC: si troverà sul lato BE il secondo estremo D della dividente colla proporzione

$$b : a :: BC : x = BD.$$

LEZIONE DECIMA.

RIDUZIONE DELLE FIGURE.

(letta il 17 febbraio 1854.)

Signori,

I principii che ci servirono di guida nei rilevamenti e nelle costruzioni dei piani possono pure guidarci nelle riduzioni di questi dal grande al piccolo. Siavi infatti un piano costrutto a qualsivoglia scala, da ridursi ad una scala minore: si faccia questa nuova scala, e condotta, nel piano che si vuol ridurre, una linea che dovrà servire di base, al qual uso d'ordinario si scelgono i lati del quadro che contiene il piano originale, si abbassino dai punti principali di questo delle perpendicolari alla base scelta, e quindi tracciata, sul foglio che deve ricevere la riduzione, la linea rappresentativa della predetta base, si misurino colla scala del piano da ridursi le distanze dei piedi delle perpendicolari, da uno degli estremi della base, alle quali distanze porremo il nome di *ascisse*, e le perpendicolari, che chiameremo *ordinate;* a partire poscia dall' estremo della nuova base corrispondente a quello da cui cominciano le misure sulla base dell'originale, si portino tutte le precedenti distanze ridotte alla nuova scala, ed a tutti i nuovi punti in tal modo determinati s' innalzino delle perpendicolari che si faranno eguali alle lunghezze delle prime, ridotte esse pure alla nuova scala: ciò fatto si saranno di già fissati sulla ri–

duzione i punti principali: se ora si uniscono questi punti con linee, come sono uniti i loro corrispondenti sull'originale, si sarà già eseguita buona parte della riduzione. Ma vari di detti punti saranno sul disegno da ridursi collegati fra loro con linee poligonali o curve, in vari modi ondulate, laonde sarà necessario di condurre fra tali punti delle basi secondarie, tanto sul disegno originale quanto sulla sua riduzione, ed operando infine su queste nuove basi come si è prescritto di fare sulla base principale, si perverrà ad ottenere la riduzione proposta.

47. **Compasso di riduzione.** — Ad evitare la costruzione della nuova scala e la moltiplicità delle misure che col metodo sovraesposto si richieggono, si è immaginato un compasso a quattro punte, detto *compasso di riduzione*, formato da due braccia che portano una punta ad ognuno de' loro estremi, le quali punte si allontanano o si avvicinano mediante un perno, che movendosi in un incastro praticato nelle due braccia, oltre al servire a queste di asse di movimento ed a tenerle fra loro unite, può traslocarsi in modo che una lineetta su di esso segnata venga a coincidere con una di quelle intagliate sopra una delle due braccia, e che hanno incise accanto le frazioni $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc. La costruzione del compasso è fondata sul noto principio di geometria, che *i triangoli simili hanno i loro lati omologhi proporzionali:* ora i due triangoli abc, ade (fig. 83) isosceli, che hanno gli angoli compresi fra i lati eguali opposti al vertice, sono simili; dunque essendo, per esempio, $ae = \frac{1}{2}ab$, sarà $de = \frac{1}{2}bc$; se fosse $ae = \frac{1}{3}ab$, sarebbe $de = \frac{1}{3}bc$, ecc.

L'uso di questo stromento è semplicissimo; vogliasi fare una figura simile ad una figura data, e tale che le sue dimensioni sieno, per esempio, il quarto delle dimensioni corrispondenti della figura originale: si porti la lineetta del perno su quella che ha segnato l'indice $\frac{1}{4}$; tutte le dimensioni che si prenderanno sulla figura data colle punte *b*, *c* saranno ridotte al quarto della loro grandezza per mezzo delle due punte *d*, *e*.

48. **Angolo di riduzione.** — Al compasso di riduzione può sostituirsi *l'angolo di riduzione* che chiunque può da se stesso costruire con somma facilità nel seguente modo; vogliasi ridurre il poligono $ABCDE$ (fig. 84) costrutto alla scala MN, alla scala minore mn: con un'apertura di compasso MN' eguale ad una lunghezza presa ad arbitrio sulla prima scala, fatto centro in un punto O d'una retta indefinita, si descriva un arco PR, poscia, centro in P e con un'apertura eguale ad una parte mn' della seconda scala, corrispondente alla parte MN' della prima, si tagli l'arco PR in Q, e si tiri OQ; l'angolo POQ sarà l'angolo di riduzione cercato. Per eseguire ora la riduzione, si porti il lato AB del poligono $ABCDE$ da O in p, e da O in q, sui due lati dell'angolo O; pq sarà il lato AB ridotto alla scala mn: infatti dall'essere pq parallela a PQ, risulta

$$OP : Op :: PQ : pq,$$

ossia

$$MN : mn :: AB : pq.$$

Dividendo ora il poligono proposto in triangoli, ed operando sopra tutti i lati di questi come si è operato sul lato AB, o procedendo per ascisse e ordinate, si ridurrà il detto poligono in quello simile *abcde*.

Per la moltiplicità dei punti e delle linee che ben spesso ingombrano il piano originale, sono raramente applicabili i metodi sovraesposti, perciò si preferisce d'ordinario il seguente: sia *A B C D* il rettangolo contenente il piano che si vuol ridurre; si formi il rettangolo *a b c d* simile al precedente, i cui lati sieno ai primi nella ragione proposta; si dividano i lati del primo in parti eguali, e i lati del secondo rispettivamente nello stesso numero di parti in cui vennero divisi i lati del primo. Unendo con linee rette i punti opposti di divisione nei due rettangoli, saranno l'uno e l'altro divisi in altrettanti piccoli scompartimenti rettangolari simili fra loro: ora si collochino per mezzo del compasso o dell'angolo di riduzione, o con altro metodo qualsivoglia i punti principali del disegno negli scompartimenti della riduzione che corrispondono a quelli del piano originale, e poscia si conducano fra questi punti le linee che uniscono l'uno all'altro i punti predetti, si perverrà con un mediocre esercizio ad una riduzione sufficientemente esatta, purchè i piccoli rettangoli sieno bastantemente moltiplicati.

58. **Pantografo e Micrografo.** — A rendere finalmente più celere ancora l'operazione di ridurre un piano dal grande al piccolo si impiega il *pantografo* od *il micrografo.* La costruzione di questi stromenti è fondata sul seguente principio: *Se per un punto P* (fig. 85) *preso sul lato M B di un parallelogramma A B M N si conduce una retta che intersechi i prolungamenti dei due lati A B, A N, in S e C, e si immagina la P H parallela a B A, si avrà la seguente proporzione:*

$$CP : PS :: PH : BS :: CH : BP.$$

Reciprocamente, *se, dati i punti P e C, si prende BS di tale lunghezza che ne risulti la precedente proporzione, i punti S, P e C saranno in linea retta.*

Ciò posto, sia il parallelogramma *ABMN* articolato ne' suoi vertici, cioè, possano i suoi lati muoversi in modo da poter fare fra loro tutti gli angoli compresi fra 0° e 180°, e suppongasi segnato il punto *S* sul prolungamento del lato *AB* colla condizione appunto che la proporzione suddetta abbia luogo: è chiaro che qualunque angolo facciano fra loro i lati contigui *AB* ed *AN*, i punti *S*, *P* e *C* non cesseranno di essere sopra di una medesima linea retta, perchè avrà pur sempre luogo la proporzione

$$CP : PS :: PH : BS.$$

Ora si sa che se da un punto *O* (fig. 86) si conducono a tutti i vertici di un poligono *ABCDE* tante rette *OA*, *OB*, *OC*, ecc., e si portano su queste o sui loro prolungamenti le parti rispettivamente proporzionali *Oa*, *Ob*, *Oc*, ecc., e poscia si uniscono convenientemente fra loro i punti *a*, *b*, *c*, ecc., si otterrà un poligono *abcde* simile al primo, per cui il punto *O* dicesi *centro di similitudine*. Da ciò ne segue che se si forma un parallelogramma articolato *ABMN* (fig. 85) con quattro righe, il quale abbia in *P* un perno perpendicolare al suo piano, e sul prolungamento dei due lati *AN* ed *AB*, in *C*, una punta d'acciaio che diremo *calcatoio*, ed in *S* una matita che chiameremo *segnatoio*, disposti in modo che si abbia la proporzione surriferita, allorchè si farà entrare il perno in un buco sopra una tavola in modo che rimanga aderente alla medesima, l'asse del perno si potrà considerare, relativamente all'originale *ABCDE* (fig. 86) ed alla sua riduzione *abcde*, quale centro di similitudine, e facendo percorrere al calcatoio le varie linee di un disegno, il segnatoio lascierà sul foglio a quest'uopo disteso in una conveniente posizione, la traccia di tutte le linee ridotte nel

rapporto stabilito; per esempio, quando il calcatoio si troverà sul punto *A*, il segnatoio sarà sul suo corrispondente *a*, e facendo percorrere al primo il perimetro *ABCDE*, il secondo percorrerà e segnerà il perimetro *abcde*. La figura 86 dimostra che il segnatoio invece di essere collocato sul prolungamento della linea che unisce il calcatoio al perno, può collocarsi fra di essi.

Acciocchè si possa ottenere la riduzione nel rapporto che si desidera è necessario che lo stromento sia costrutto in modo che il perno, il calcatoio ed il segnatoio si possano disporre in linea retta per una sua posizione nel rapporto

$$CP : PS :: CH : PB;$$

Se ciò ha luogo per una posizione, sussisterà, come già si è osservato, per tutte le altre.

È pure necessario che il rapporto $CH : PB$ possa variarsi a piacimento, e questa variazione può effettuarsi in due maniere, o variando due delle posizioni del perno, del calcatoio e del segnatoio, o variando le lunghezze de' lati del parallelogramma. A quest'uopo sono segnate sui lati *BM* e *BS* alcune divisioni coi numeri esprimenti i rapporti $\frac{1}{2}$, $\frac{1}{3}$, $\frac{1}{4}$, ecc.; così ponendo, per esempio, il perno ed il segnatoio nelle rispettive divisioni segnate $\frac{1}{5}$, si riduce l'originale ad $\frac{1}{5}$ delle sue dimensioni.

L'uso del micrografo è analogo a quello del pantografo e non differisce da questo che nel variarsi il rapporto col variare de' lati del parallelogramma, mentre nel pantografo questo rapporto si varia col variare due delle posizioni delle tre punte, laonde ci dispensiamo dal descriverlo.

Ci siamo soltanto occupati della riduzione dal grande al piccolo, perchè quella dal piccolo al grande non si usa, e non può dare veruna esattezza.

59. **Riduzione de' piani colla condizione che le aree dell'originale e della riduzione stieno fra loro in una data ragione.** — Se si volesse ridurre un piano colla condizione che le aree dell'originale e della riduzione fossero fra loro in una ragione data $m : n$, essendo $m > n$, si dovrebbe operare nel seguente modo: sia AB (fig. 87) un lato della figura da ridursi, od una parte qualsivoglia della sua scala; si divida AB in un numero m di parti eguali; ciascuna di queste parti sarà eguale ad $\frac{AB}{m}$: fatto centro nel punto O sul mezzo della retta AB, con un raggio $AO = OB$, si descriva un semicircolo; si prenda sulla AB una parte AC che contenga n parti eguali ad $\frac{AB}{m}$, ossia si faccia $AC = \frac{n}{m} AB$; in C s'innalzi una perpendicolare ad AB, verrà questa perpendicolare intersecata dalla semicirconferenza in un punto D, e sarà AD il lato della figura ridotta omologo al lato AB dell'originale, e se AB è invece una parte della scala data, sarà AD la parte corrispondente della scala della riduzione: infatti si avrà

$$AB : AD :: AD : AC,$$

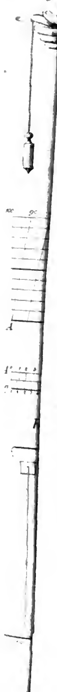
d'onde $$AD = \sqrt{AB \times AC},$$

ma $$AC = \frac{n}{m} AB, \text{ dunque}$$

$$AD = \sqrt{\frac{n}{m} \overline{AB}^2} = AB \sqrt{\frac{n}{m}}.$$

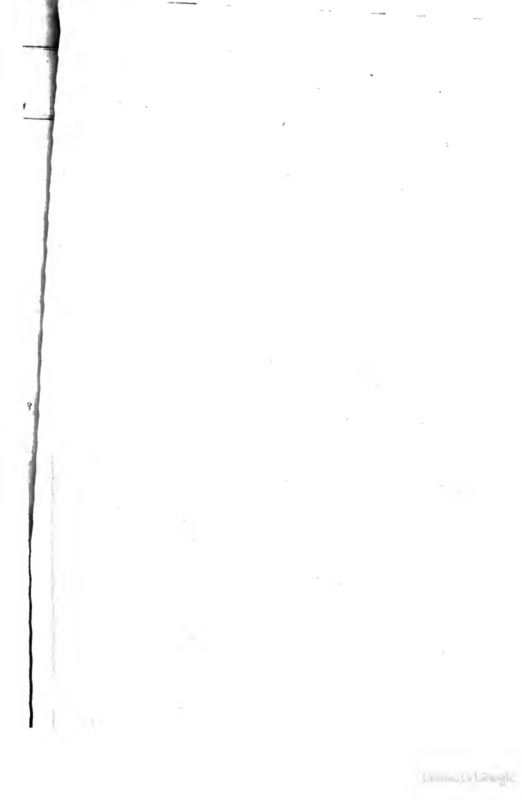
ciò che deve essere; poichè se la ragione tra le aree delle due figure simili è $\frac{n}{m}$, quella tra i lati omologhi delle medesime figure sarà appunto $\sqrt{\frac{n}{m}}$.

FINE DELLE NOZIONI GEOMETRICHE.



oz. Geo

Fig



SCUOLE CENSUARIE.

NOZIONI TRIGONOMETRICHE.

LEZIONE PRIMA.

CENNI SUI LOGARITMI.

(letta il 21 febbraio 1834.)

Signori,

L'indole di queste scuole non permettendomi di estendermi nella teoria de' logaritmi quanto si richiederebbe onde porgere un'idea compiuta de' medesimi, io non vi accennerò se non ciò che possa più direttamente condurre all'uso pratico delle tavole che li comprendono. Ai cenni sui logaritmi premetterò le seguenti *nozioni preliminari* che renderanno più chiaro ciò che poscia vi esporrò intorno ai medesimi.

60. **Nozioni preliminari.** — Si chiamano *potenze* di un numero altri numeri che si possono scomporre in fattori tutti eguali al primo numero: per esempio, il numero 27 potendosi scomporre in fattori tutti eguali a 3 è una potenza del 3.

Le varie potenze di un numero si distinguono per mezzo degli *esponenti*, i quali sono numeri che si scrivono alla

destra e al disopra di quello di cui esprimono la potenza:

così $10 = 10^1$ è la prima potenza del *dieci*,

$100 = 10^2$ è la seconda,

$1000 = 10^3$ è la terza potenza del *dieci*,

$a = a^1$ è la prima,

$a \times a = a^2$ è la seconda,

$a \times a \times a = a^3$ è la terza,

ed in generale a^m è la m^{esima} potenza di a.

Ora per moltiplicare fra loro due o più quantità eguali, affette da esponenti, si *dà al numero od alla lettera un esponente eguale alla somma dei due esponenti:* per esempio,

$a^2 \times a^3 = a^{2+3}$; infatti $a^2 = a \cdot a$, $a^3 = a \cdot a \cdot a$,

dunque $a^2 \times a^3 = a \cdot a \times a \cdot a \cdot a = a^5$,

si avrebbe similmente

$a^m \times a^n = a^{m+n}$, ed $a^m \times a^m = a^{2m}$;

ma $a^m \times a^m = (a^m)^2$, dunque $(a^m)^2 = a^{2m}$,

ed essendo n il numero de' fattori eguali ad a^m, si avrà

$$(a^m)^n = a^{nm} .$$

Dunque per elevare una quantità data ad una potenza qualsivoglia, *si moltiplica il suo esponente per il numero indicante la potenza a cui devesi innalzare la data quantità.*

Donde ne segue che viceversa: per estrarre una radice qualsivoglia da una data quantità, *devesi dividere il suo esponente per l'indice della radice chiesta;* per esempio,

$$\sqrt{a^4} = a^{\frac{4}{2}} = a^2 , \qquad \sqrt[3]{a} = a^{\frac{1}{3}} ; \qquad \sqrt[n]{a^m} = a^{\frac{m}{n}} .$$

Donde nascono gli esponenti frazionari. Un esponente frazionario esprime sempre una radice il cui indice è eguale al denominatore dell'esponente.

Il quoziente di due numeri o di due lettere eguali *si ottiene col dare al numero od alla lettera un esponente eguale alla differenza dei due esponenti dati*; cosicchè

$$\frac{a^5}{a^2}=a^{5-2}=a^3\,, \qquad \text{infatti} \quad \frac{a^5}{a^2}=\frac{a\,.\,a\,.\,a\,.\,a\,.\,a}{a\,.\,a}\,,$$

togliendo i fattori comuni rimane a^3; si troverebbe altresì

$$\frac{a^3}{a^5}=a^{3-5}=a^{-2}\,; \qquad \text{ma} \quad \frac{a^3}{a^5}=\frac{a.a.a}{a.a.a.a.a}=\frac{1}{a^2}\,;$$

dunque
$$a^{-2}=\frac{1}{a^2}\,;$$

perciò *una quantità affetta da un esponente negativo equivale ad una frazione che abbia per numeratore* uno, *e per denominatore la stessa quantità affetta dal medesimo esponente preso positivamente.*

Finalmente, da quanto si è detto essendo

$$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n}\,, \qquad \text{sarà pure} \quad \frac{a^m}{a^m}=a^{m-m}=a^0\,;$$

$$\text{ma} \quad \frac{a^m}{a^m}=1\,; \qquad \text{dunque} \quad a^0=1\,.$$

Dunque una quantità affetta dall'esponente *zero* è sempre eguale ad *uno*.

61. **Proprietà fondamentali dei logaritmi.** — I *logaritmi* sono numeri artificiali, che si sostituiscono ai veri numeri per rendere più semplici i calcoli. L'invenzione dei logaritmi è dovuta al barone scozzese *Gio. Neper*.

In generale chiamasi *logaritmo d'un numero l'esponente della potenza a cui devesi elevare un numero invariabile per ottenere il primo numero.* Il numero invariabile dicesi *base* del sistema di logaritmi, e può prendersi arbitrariamente purchè non sia eguale ad *uno*, posciachè tutte le potenze di *uno* sono eguali all'*unità*.

Nell'equazione $a^m = b$, l'esponente m è il logaritmo di b nel sistema di logaritmi che ha per base a, ciò che si esprime colla seguente notazione;

$$m = \log b \,.$$

Parimenti nell'equazione $a^n = c$, v'ha

$$n = \log c \,.$$

Moltiplicando le due equazioni

$$a^m = b \,,$$

$$a^n = c \,,$$

membro a membro, si troverà

$$a^m \times a^n = b \times c \,;$$

ma $$a^m \times a^n = a^{m+n} \qquad (\S\ 60),$$

perciò $$a^{m+n} = b \times c \,;$$

donde risulta $$m + n = \log b \times c \,;$$

ossia $$\log b + \log c = \log b\, c \,.$$

Dunque: 1.° *il logaritmo del prodotto di due numeri è eguale alla somma dei logaritmi de' due numeri*. Si troverebbe in pari modo che il logaritmo del prodotto di più fattori è eguale alla somma dei logaritmi di tutti i fattori.

Dividendo le due equazioni precedenti l'una per l'altra,

si troverà: $$\frac{a^m}{a^n}=\frac{b}{c} ;$$

ora $$\frac{a^m}{a^n}=a^{m-n} ;$$

dunque $$m-n=log\frac{b}{c} ,$$

ossia $$log\, b-log\, c=log\frac{b}{c} .$$

Dunque: 2.° *il logaritmo di un quoziente è eguale alla differenza fra il logaritmo del dividendo e quello del divisore.*

Se si elevano i due membri dell'equazione $a^m=b$ ad una potenza n, si avrà

$$(a^m)^n=b^n ,$$

ma $$(a^m)^n=a^{nm} ;$$

perciò $$nm=log\, b^n ,$$

ossia $$n\, log\, b=log\, b^n .$$

Perciò: 3.° *il logaritmo di qualsivoglia potenza d'un numero è eguale al prodotto del logaritmo del numero dato per l'esponente della potenza a cui il numero deve essere elevato.*

Se finalmente si estrae la radice n dai due membri dell'equazione $a^m=b$, si troverà

$$\sqrt[n]{a^m}=\sqrt[n]{b} ;$$

ma $$\sqrt[n]{a^m}=a^{\frac{m}{n}} ,$$

ossia $$\frac{m}{n}=log\sqrt[n]{b} \quad e \quad \frac{log\, b}{n}=log\sqrt[n]{b} .$$

Dunque: 4.° *il logaritmo della radice di un numero si ottiene dividendo il logaritmo del numero proposto per l'indice della radice da estrarsi.*

Dalle quattro precedenti proprietà fondamentali si può conchiudere, che se si avesse una tavola formata di due colonne, la prima delle quali contenesse i numeri interi, e a lato d'ognuno di essi vi fossero nella seconda colonna gli esponenti delle potenze a cui dovrebbesi elevare un numero invariabile *a* per formare i primi numeri, ossia i logaritmi dei numeri nel sistema che ha per base *a*, invece di eseguire i calcoli sui numeri della prima colonna, si potrebbero eseguire sui loro logaritmi posti nella seconda, ed operare come segue:

1.° Per effettuare un prodotto si dovrebbero cercare nella tavola *i logaritmi de' fattori, sommarli onde avere il logaritmo del prodotto, e finalmente cercare il nuovo logaritmo nella tavola, e prendere in essa il numero che a questo corrisponde.*

2.° Onde dividere un numero per un altro *si toglierebbe il logaritmo del secondo numero da quello del primo, e la differenza sarebbe il logaritmo del quoziente.*

3.° Per formare una potenza qualsiasi di un numero, *basterebbe cercare il logaritmo del numero, e moltiplicarlo per l'esponente della potenza; nel prodotto si avrebbe il logaritmo del numero proposto elevato alla data potenza.*

4.° Per estrarre finalmente una radice da un numero dato, *si cercherebbe nella tavola il logaritmo del numero, si dividerebbe questo logaritmo per l'indice della radice, ciò che darebbe il logaritmo della radice cercata.*

Col mezzo di una tavola di logaritmi le moltiplicazioni sono dunque ridotte a semplici addizioni, le divisioni a sot-

trazioni, la formazione delle potenze a moltiplicazioni, e le estrazioni delle radici a divisioni.

62. **Costruzione delle tavole di logaritmi.** — Supponiamo ora che si voglia costrurre una tavola di logaritmi nel sistema di base $a > 1$, e vediamo quali relazioni abbiano i numeri coi loro logaritmi.

Col fare nell'equazione $a^m = b$, successivamente

$$m = 0,\ \frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ \text{ecc.}$$

risulta $b = 1,\ a^{\frac{1}{2}},\ a,\ a^{\frac{3}{2}},\ a^2,\ a^{\frac{5}{2}},\ a^3,\ a^{\frac{7}{2}}$, ecc.

Ciò che prova, che tutti i valori di b maggiori dell'unità sono prodotti dalle potenze di a, i cui esponenti sono positivi, interi o frazionari, e tanto più grandi quanto maggiore è b.

Col fare poi

$$m = 0,\ -1,\ -2,\ -3,\ -4,\ -5,\ \ldots$$

risulterà

$$b = 1,\ \frac{1}{a},\ \frac{1}{a^2},\ \frac{1}{a^3},\ \frac{1}{a^4},\ \frac{1}{a^5} \ldots$$

Dunque tutti i valori di b minori dell'unità sono prodotti dalle potenze di a, i cui esponenti sono negativi, ed hanno un valore numerico tanto più grande quanto più piccolo è quello di b, di maniera che se b avesse un valore infinitamente piccolo, l'esponente di a, o il logaritmo di b, avrebbe un valore numerico infinitamente grande.

Sia in secondo luogo la base $a < 1$, ed eguale ad $\frac{1}{a'}$;

per $m = 0, \quad 1, \quad 2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \ldots$

si ottiene

$$b = 1, \quad \frac{1}{a'}, \quad \frac{1}{a'^2}, \quad \frac{1}{a'^3}, \quad \frac{1}{a'^4}, \quad \frac{1}{a'^5}, \ldots$$

e per $m = 0, \ -1, \ -2, \ -3, \ -4, \ -5, \ldots$

si ha $b = 1, \quad a', \quad a'^2, \quad a'^3, \quad a'^4, \quad a'^5 \ldots$

Dunque in questa seconda ipotesi succede quanto si è osservato accadere in quella di $a > 1$, ma in senso contrario.

Da quanto precede risulta, che se la base è maggiore di uno, il logaritmo d'un numero intero o frazionario è positivo, e che quello d'una frazione è negativo; e che il contrario hà luogo quando la base è minore dell'unità; dunque nell'una e nell'altra ipotesi i numeri negativi non hanno logaritmi *reali*, o in altri termini, il logaritmo d'una quantità minore di zero è *un'espressione immaginaria*. In qualsivoglia sistema poi, il logaritmo della base è 1, ed il logaritmo di 1 è 0.

Infatti $\quad a^1 = a, \quad$ donde $\quad log\, a = 1,$

$\quad a^0 = 1, \quad$ » $\quad log\, 1 = 0.$

A rendere veramente utile la teoria de' logaritmi si costrussero delle tavole, come quelle che abbiamo supposto, le quali contengono, in una colonna, i numeri interi, ed in un'altra colonna, i logaritmi di ciascun numero.

Il sistema scelto pei logaritmi delle tavole, detti perciò logaritmi *tavolari*, o *volgari*, si è quello che ha per base 10: in questo sistema v'ha

$\log 1 = 0$, poichè $10^0 = 1$,

$\log 10 = 1$, » $10^1 = 10$,

$\log 100 = 2$, » $10^2 = 100$,

$\log 1000 = 3$, » $10^3 = 1000$,

$\log 10000 = 4$, » $10^4 = 10000$

ecc. ecc.

Ne segue che i numeri compresi fra 1 e 10 hanno per logaritmo un numero minore dell'unità, i logaritmi de' numeri compresi fra 10 e 100 sono maggiori di 1, e minori di 2, ecc.

V'ha poi $\log \frac{1}{10} = \log 10^{-1} = -1$,

$$\log \frac{1}{100} = \log 10^{-2} = -2,$$

$$\log \frac{1}{1000} = \log 10^{-3} = -3,$$

ecc. ecc. ecc.

I logaritmi delle frazioni, come già abbiamo osservato accadere per una base più grande di uno, sono dunque negativi, e numericamente tanto maggiori quanto più piccola è la frazione, cosicchè se il valore di questa fosse infinitamente piccolo, il valore numerico del suo logaritmo sarebbe infinitamente grande, ciò che si esprime dicendo che il logaritmo di zero è eguale all'*infinito negativo*, od eguale $a - \infty$.

La parte intera del logaritmo d'un numero chiamasi la *caratteristica* del logaritmo; così i logaritmi dei numeri compresi fra 1 e 10 hanno tutti la caratteristica 0, la ca-

ratteristica de' numeri compresi fra 10 e 100 è 1, quella de' logaritmi de' numeri compresi fra 100 e 1000 è 2, ecc. In generale *la caratteristica è composta di tante unità meno una quante sono le cifre che compongono il numero.*

Conoscendo il logaritmo d'un numero si ottiene il logaritmo d'un altro numero 10, 100, 1000, ecc. volte più grande, aggiugnendo alla sola caratteristica 1, 2, 3, ecc. unità. Infatti v'ha

$$log\,(a \times 10^n) = log\,a + log\,10^n = log\,a + n\,.$$

Reciprocamente togliendo 1, 2, 3, ecc. unità alla caratteristica del logaritmo d'un numero, si ottiene il logaritmo d'un numero 10, 100, 1000 volte più piccolo; poichè

$$log\,\frac{a}{10^n} = log\,a - log\,10^n = log\,a - n\,.$$

Per dare un'idea del modo di calcolare i logaritmi dei numeri, supponiamo che si voglia, per esempio, il logaritmo di 5; osservando che il 5 è compreso fra 10 ed 1, cerchiamo una media proporzionale fra 1 e 10; si avrà

$$\sqrt{1 \times 10} = 3,162277\ldots,$$

ma $$log\sqrt{1 \times 10} = \frac{log\,1 + log\,10}{2} = 0,5\,;$$

dunque $$log\,3,162277\ldots = 0,5\,.$$

Ora il 5 è compreso fra 3,162277 ... e 10; cer-

cando una media proporzionale fra questi ultimi due numeri, si avrà

$$\sqrt{3,162277 \times 10} = 5,623415 \ldots;$$

ma $\quad log \sqrt{3,162277 \times 10} = \frac{0,5+1}{2} = 0,75 ;$

dunque $\quad log\, 5,623415 \ldots = 0,75 .$

Essendo il 5 compreso fra 3, 162277... e 5,623415..., si dovrà cercare il logaritmo della media proporzionale fra questi due numeri, e così continuando, si troverà dopo 22 estrazioni di radici quadrate,

$$log\, 5 = 0,6989700 \ldots$$

Altri metodi di gran lunga più speditivi di questo si impiegarono nella costruzione delle tavole di logaritmi, dei quali metodi noi non abbiamo qui ad occuparci.

Osserveremo solo non essere necessario di calcolare i logaritmi di tutti i numeri interi, ma bastare alla formazione delle tavole il calcolo de' logaritmi de' numeri primi, perchè, ad esempio,

$$log\, 6 = log\, 2 + log\, 3 ,$$

ed in generale

$$log\, ab = log\, a + log\, b :$$

non è poi necessario che le tavole contengano i logaritmi

delle frazioni, poichè questi si ottengono sottraendo dal logaritmo del numeratore il logaritmo del denominatore, essendo

$$\log \frac{a}{b} = \log a - \log b \, .$$

LEZIONE SECONDA.

USO DELLE TAVOLE DEI LOGARITMI.

(letta il 24 febbraio 1854.)

Signori,

Abbiamo detto nella precedente lezione che la base dei logaritmi delle tavole è il 10. Questi logaritmi sono dunque gli esponenti delle potenze a cui devesi innalzare il numero costante 10 per riprodurre tutti i numeri.

Le tavole di logaritmi più conosciute sono le piccole di *Reynaud* e di *Lalande*, e le grandi di *Callet*. Noi supporremo che si abbiano queste ultime fra le mani; da quanto diremo intorno all'uso di queste sarà facile dedurre il modo di adoperare le altre.

Tutte le tavole di logaritmi sono precedute da una spiegazione sul modo con cui sono disposte, e sull'uso che se ne può fare; accenneremo tuttavia brevemente come sieno distribuite, ed in qual modo debbansi usare le tavole di *Callet*.

Queste tavole danno direttamente i logaritmi de' primi 108000 numeri naturali; in esse non sono notate le caratteristiche de' logaritmi, perchè queste caratteristiche sono sempre eguali, come abbiam detto nella scorsa lezione, al numero delle cifre della parte intera del numero proposto, meno una.

La prima parte delle tavole, chiamata *chiliade* 1.ª, comprende i primi 1200 numeri naturali in una colonna che porta in fronte la lettera N, iniziale di numero, ed accanto a questa i logaritmi di ciascuno di tali numeri; la colonna de' logaritmi è distinta dall'abbreviatura *Log*.

Le tavole che seguono questa prima parte sono più composte. Nella colonna N stanno i numeri naturali dal 1020 al 10800 inclusivamente: nella seguente colonna 0 trovasi il logaritmo d'ogni numero; ma la colonna 0 non dà solo i logaritmi dei numeri dal 1020 al 10800, ma benanche quelli dei loro prodotti per qualsivoglia potenza di 10; infatti, da quanto si disse intorno alla caratteristica de' numeri ne segue che conoscendo la caratteristica d'un logaritmo, si conosce pure quante cifre abbia il numero corrispondente: di più dalla formola

$$\log(a \times 10^n) = \log a + n ,$$

risulta che i numeri che stanno fra loro come le potenze del 10 devono avere la stessa parte decimale nel logaritmo, e variare soltanto nella caratteristica; infatti si trova

$$\log 593950 = 5,7737499 ,$$
$$\log 59395 = 4,7737499 ,$$
$$\log 5939,5 = 3,7737499 ,$$
$$\log 593,95 = 2,7737499 ,$$
$$\log 59,395 = 1,7737499 ,$$
$$\log 5,9395 = 0,7737499 .$$

Mediante tale considerazione, le tavole de' logaritmi si distribuirono in modo, che col mezzo delle colonne intitolate

0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9, si possono trovare, non solo i logaritmi de' numeri fino al 108000, ma quelli pur anche d'una infinità d'altri intieri o frazionari, come si vedrà fra breve.

L'ultima colonna intitolata *dif.* contiene le differenze che corrono da un logaritmo a quello che immediatamente lo segue nella tavola. Al disotto d'ogni differenza si notarono pure il decimo, i due decimi, ecc., della medesima, a maggior comodo del calcolatore.

63. **Uso delle tavole de' logaritmi.** — Nell'adoperare le tavole de' logaritmi trattasi sempre di risolvere le due questioni seguenti:

1.° *Dato un numero trovare il suo logaritmo:*

2.° *Dato un logaritmo trovare il numero corrispondente.*

1.ª *Questione.* Il numero di cui si cerca il logaritmo può essere un numero intero, un numero frazionario od una frazione.

Nel primo caso se il numero proposto non è maggiore del più gran numero delle tavole, se ne trova immediatamente il logaritmo; per esempio, se si chiedesse il logaritmo del numero 83957, si cercherebbe nelle tavole il numero 8395, e nella colonna 0 si troverebbero le prime tre cifre del logaritmo chiesto, cioè, 924; poscia nella colonna 7, discendendo fino alla linea del numero 8395 si troverebbero le altre quattro cifre 0569, e si conchiuderebbe essere

$$\log 83957 = 4,9240569\,.$$

Ma se fosse più grande, per esempio, se si dovesse trovare il logaritmo del numero 34735879, osservando che questo numero ha 8 cifre, si conchinderebbe che la caratteristica

del suo logaritmo è 7 (§ 62); dunque la questione è ridotta a cercare la parte decimale del logaritmo.

A quest'uopo si separino tre cifre a destra, acciocchè la parte a sinistra sia uno dei numeri delle tavole; si ottiene il numero 34735, 879. Ora, da quanto dicemmo, la parte decimale del logaritmo del numero proposto è eguale alla parte decimale del logaritmo di questo nuovo numero; ma 34735, 879 è compreso fra 34735 e 34736; così il suo logaritmo è più grande di *log* 34735 e più piccolo di *log* 34736: facendo astrazione della caratteristica, v'ha

$$\log 34735 = 5407673\ ;$$

la differenza fra questo logaritmo e quello successivo è 125, e supponendo i logaritmi proporzionali ai numeri corrispondenti, ciò che veramente non è, ma che si può supporre in tutti i casi analoghi a questo, colla proporzione 1, *differenza fra due numeri successivi delle tavole, sta a* 0, 879, *differenza fra* 34735 *e* 34735, 879, *come* 125 : x, si trova $x = 110$; quantità da aggiugnersi al logaritmo di 34735, onde avere il logaritmo cercato; dunque finalmente

$$\log 34735879 = 7,5407783\ .$$

Senza ricorrere alla proporzione si può operare nel seguente modo: la parte decimale del numero essendo 0, 879, e la differenza fra due logaritmi consecutivi essendo 125, nelle parti proporzionali di questa differenza si legge

per 0, 8	100		
per 0, 7 . . 88,		dunque per 0, 07	8, 8
per 0, 9 . . 113,		dunque per 0, 009....	1, 13
		somma	109, 93 :

è perciò 110, come sopra, la parte da aggiugnersi a 5407673, onde avere il logaritmo cercato.

Se il numero proposto fosse 645397; si troverebbe prima $\log 64539 = 8098222$, poscia la differenza delle tavole essendo 68 e quella fra i numeri 0, 7, si cercherebbe al disotto di 68 la frazione scritta accanto al 7, e si troverebbe 48 da aggiugnersi a $\log 64539$, e si avrebbe finalmente

$$\log 645397 = 5,8098270 .$$

Sia ora il numero frazionario $\frac{15464}{43}$; v'ha

$$\log \frac{15464}{43} = \log 15464 - \log 43 .$$

Cercando nelle tavole i logaritmi di questi due numeri, si trova

$$\log 15464 = 4,1893218$$
$$-\log\ 43 = 1,6334685$$
$$\log \frac{15464}{43} = 2,5558533 .$$

Se il numero proposto è una frazione il suo logaritmo è negativo, e si ottiene sottraendo il logaritmo del numeratore da quello del denominatore.

Vogliasi, per esempio, il logaritmo della frazione $\frac{7}{9}$. Si avrà

$$\log \frac{7}{9} = \log 7 - \log 9 = -(\log 9 - \log 7)$$
$$= -(0,95424251 - 0,84509804)$$
$$= -\ 0,10914447 .$$

Si troverebbe similmente

$$log \frac{5}{17} = log\,5 - log\,17 = -(log\,17 - log\,5)$$

$$= -(1,23044892 - 0,69897000)$$

$$= -0,53147892\ .$$

Se la frazione è decimale si fa prima astrazione della virgola, poscia, ottenuto il logaritmo del numero risultante, si sottraggono tante unità quante erano le cifre decimali,

$$log\,75,47325 = log\,7547325 - 5$$

$$= 6,8777931 - 5 = 1,8777931\ ;$$

$$log\,0,0739 = log\,739 - 4 = -(4 - log\,739)$$

$$= -(4 - 2,8686444) = -1,1313556\ .$$

In questo modo i decimi vengono ad avere -0, per caratteristica del loro logaritmo, i centesimi -1, i millesimi -2, ecc., come già si è osservato (§ 62).

V'ha un'altra maniera di scrivere i logaritmi delle frazioni decimali, che consiste nello scrivere la parte decimale del logaritmo come vien data dalle tavole, mettendo negativa la sola caratteristica; si troverebbe, per esempio, in questo modo,

$$log\,0,8648 = -4 + 3 + 0,9369157$$

$$= -1 + 0,9369157\ ,$$

che si scrive mettendo una lineetta sulla caratteristica, ed un punto invece della virgola, come segue:

$$log\,0,8648 = \bar{1}.9369157\ .$$

Si troverebbe parimenti

$$\log 0,0739 = \bar{2}.8686444 .$$

Con questo metodo i logaritmi dei decimi hanno per caratteristica $\bar{1}$, quelli dei centesimi $\bar{2}$, quelli dei millesimi $\bar{3}$, ecc.

Ma più generalmente i logaritmi delle frazioni decimali si aumentano di 10 unità, ed allora diventano interamente positivi. Così si trova che

$$\log 0,227 = -(3 - \log 227) + 10 = 7 + \log 227,$$

ossia $\log 0,227 = 9,35602586$;

si troverebbe in egual modo

$$\log\ 0,0227 = 8,35602586 ,$$
$$\log\ 0,00227 = 7,35602586 ,$$
$$\log 0,000227 = 6,35602586 ,$$
ecc. ecc.

Ed in quest'ultimo modo i logaritmi dei decimi hanno per caratteristica 9, quelli dei centesimi 8, quelli dei millesimi 7, ecc.

Questa maniera di scrivere i logaritmi delle frazioni decimali, sembra a prima vista dover produrre qualche confusione nel calcolo, ma ciò non può succedere, poichè la natura stessa delle operazioni fa conoscere se il logaritmo possa appartenere ad un intero che avrebbe otto, nove o dieci cifre, o piuttosto ad una frazione decimale.

2.ª *Questione. Dato un logaritmo trovare il numero corrispondente.*

Il logaritmo dato può essere positivo o negativo.

Se il logaritmo è positivo, e se la sua caratteristica è 4, che è la più elevata delle tavole, si cerca questo logaritmo fra quelli dei numeri di cinque cifre, e se si trova nella tavola si leggerà accanto il numero a cui corrisponde.

Più spesso si troverà che il logaritmo cade fra due di quelli della tavola; allora questo logaritmo corrisponderà al numero posto accanto al più piccolo dei due logaritmi fra cui è compreso, aumentato di una frazione che si tratta di trovare almeno approssimativamente.

A quest'uopo si cerca nelle tavole fra quali logaritmi sia compreso quello proposto, poscia si ottiene la frazione da aggiugnersi al numero corrispondente al più piccolo dei due logaritmi che comprendono il logaritmo dato, onde avere il numero a questo corrispondente, colla seguente proporzione:

La differenza data dalle tavole fra due logaritmi consecutivi : 1, *differenza fra i due numeri ad essi corrispondenti* :: *la differenza fra il logaritmo proposto ed il minore dei due precedenti* : x.

Se il logaritmo ha una caratteristica minore di 4, si cerca se è fra quelli della tavola, ed in tal caso si ottiene subito il numero corrispondente; altrimenti si rende prima la caratteristica eguale a 4, acciocchè si possa stabilire la precedente proporzione, la quale non dà una sufficiente approssimazione se il numero che si cerca non è maggiore di 10000; si opera poscia come qui sopra, e trovato il numero si divide per 10, 100, ecc., se si è dovuto aggiugnere alla caratteristica 1, 2, ecc. unità.

Esempio. Si domanda il numero corrispondente al logaritmo 3,4752780. Si distribuisca il calcolo nel modo seguente:

log dato 3, 4752780

log 29872 . . . . 4, 4752643

Diff. tav. 146 .   *Diff.* 137 .

$146 : 1 :: 137 : x = 0,94$.

Dunque $3,4752780 =$ *log* 2987, 294 .

Senza ricorrere alla proporzione si potrebbe osservare che sotto la differenza 146 delle tavole v'ha

per 131 . . . . . 0, 9

per 58 . . 0, 4 dunque per 6 . . . . . 0, 04

somma pari al 4.° termine $x =$ . . . . . 0, 94 .

Essendo la caratteristica maggiore di 4, si rende eguale a 4, ed ottenuto il numero si moltiplica per 10, 100, ecc., secondo il numero delle unità tolte alla caratteristica per farla eguale a 4.

Sia dato il logaritmo . . . . 7, 4793896 ,

v'ha *log* 30157 . . . . 4, 4793881

Diff. tav. 144 .   *Diff.* 15 .

$144 : 1 :: 15 : x = 0,10$.

Dunque $7,4793896 =$ *log* 30157100 .

In questo esempio, e nei casi analoghi, non si può ottenere un'approssimazione maggiore delle decine col mezzo della solita proporzione, e se si volesse una maggiore approssimazione converrebbe ricorrere ad altri calcoli più

complicati dei quali noi non abbiamo ad occuparci, essendo in tutti i casi che si possono presentare nelle operazioni geodetiche, sufficiente l'approssimazione che si può ottenere coi metodi che abbiamo indicati.

Supponiamo ora che il logaritmo proposto sia negativo; in tal caso il numero corrispondente è una frazione che si può sempre ottenere con molta approssimazione.

1.° *Esempio.* Debbasi trovare il numero corrispondente al logaritmo $-3,8642427$. Si sottragga il numero proposto, considerato come positivo, da un numero tale, che la differenza risultante abbia 4 per caratteristica, si avrà

$$\begin{array}{r} 8 \\ -3,8642427 \\ \hline 4,1357573 \end{array} = \log 13669 \;;$$

separando ora otto cifre a destra si avrà

$$-3,8642427 = \log 0,00013669 \,.$$

2.° *Esempio.* Debbasi trovare il numero corrispondente al logaritmo $\bar{3}.8642427$, che ha la sola caratteristica negativa. Si aumenti la caratteristica di 7 unità, onde avere un logaritmo positivo la cui caratteristica sia 4, risulterà

$$4,8642427 = \log 73154 \,,$$

e separando tante cifre quante sono le unità nel numero di cui si è aumentato la caratteristica del logaritmo proposto, si avrà finalmente

$$\bar{3}.8642427 = \log 0,0073154 \,.$$

3.° *Esempio.* Si domanda la frazione decimale corrispondente al logaritmo

$$9,6328460$$

Si ha dalle tavole $\quad$ ***log*** $42938 = 4,6328418$

$\qquad\qquad$ *Diff. tav.* 102. *Diff.* 42.

Donde $\quad 9,6328460 =$ ***log*** 4293840000;

ma il logaritmo proposto essendo quello di una frazione, esso non è altro che il risultato ottenuto coll'aggiugnere 10 al vero logaritmo di essa frazione, e siccome aumentando un logaritmo di 10 si viene a moltiplicare il numero corrispondente per 10000000000, si dovrà, nel caso presente, separare 10 cifre a destra, e si otterrà finalmente

$$9,6328460 = \log 0,429384\ .$$

64. **Complementi aritmetici.** — Chiamasi *complemento aritmetico il risultato che si ottiene sottraendo un logaritmo da 10*; per esempio,

$$10 - \log 14 = 10 - 1,1461280 = 8,8538720,$$

è il complemento aritmetico del logaritmo di 14. I logaritmi delle frazioni decimali scritti secondo l'ultimo metodo da noi accennato, non sono altro che i complementi aritmetici de' veri logaritmi di esse frazioni, fatta astrazione del loro segno.

I complementi aritmetici servono a ridurre le sottrazioni ad addizioni.

Esempio numerico dei complementi aritmetici.

Debbasi effettuare il calcolo seguente,

$$x = \sqrt[5]{\left(\frac{825 \times 87}{341 \times 76}\right)^3};$$

impiegando i logaritmi si trova

$$log\, x = \frac{3}{5}(log\, 825 + log\, 87 + comp.\, log\, 341 + comp.\, log\, 76 - 20).$$

Calcolo di x.

$$log\, 825 = 2,9164539$$
$$log\, 87 = 1,9395193$$
$$comp.\, log\, 341 = 7,4672456$$
$$comp.\, log\, 76 = 8,1191864$$
$$20,4424052$$
$$-20$$

$$log\frac{825.\,87}{341.\,76} = 0,4424052$$

$$3\, log\frac{825.\,87}{341.\,76} = 1,3272156$$

$$\frac{3}{5}\, log\frac{825.\,87}{341.\,76} = 0,2654431 = log\, x.$$

$$log\, 18426 = 4,2654311$$

Diff. tav. 236. *Diff.* 120

$$x = 1,84265.$$

Da questo calcolo si può scorgere che invece di sottrarre dalla somma dei logaritmi di 825 e di 87, la somma dei logaritmi di 341 e di 76, si aggiungono ai primi due i

complementi aritmetici dei due ultimi; ma dopo di aver eseguito la somma totale si deducono da questa tante volte 10 quanti sono i complementi che si impiegarono. Infatti il logaritmo di x si potrebbe evidentemente scrivere nel seguente modo:

$$\log x = \frac{3}{5}(\log 825 + \log 87 - \log 341 - \log 76)$$

$$= \frac{3}{5}(\log 825 + \log 87 + 10 - 341$$

$$+ 10 - \log 76 - 10 - 10),$$

e siccome $10 - \log 341$ è il complemento aritmetico di $\log 341$, e $10 - \log 76$ è il complemento aritmetico di $\log 76$, si ha come sopra

$$\log x = \frac{3}{5}(\log 825 + \log 87 + \text{comp.} \log 341$$

$$+ \text{comp.} \log 76 - 20).$$



LEZIONE TERZA.

COSTRUZIONE DEI TRIANGOLI. - ALGORITMO TRIGONOMETRICO. PROPRIETÀ GEOMETRICHE DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

(Letta il 3 marzo 1854.)

Signori,

Tutte le questioni planimetriche si riducono in ultima analisi alla risoluzione di triangoli. Ora date tre delle sei cose che costituiscono un triangolo, cioè tre lati e tre angoli, si possono sempre trovare le altre tre, purchè fra i dati siavi almeno un lato.

65. **Problema generale.** — Ci proporremo adunque in questa lezione la risoluzione della seguente questione:

Dati tre de' sei elementi che costituiscono un triangolo rettilineo, trovare gli altri tre.

Ora i dati possono essere:

1.° *Un lato e due angoli:*

2.° *Due lati e un angolo:*

3.° *I tre lati.*

Ma la disposizione de' dati può ne' primi due casi variare ne' seguenti modi:

1.° a. *Un lato e gli angoli adiacenti:*
b. *Un lato, un angolo adiacente e un angolo opposto:*

2.° c. *Due lati e l'angolo opposto ad uno di essi:*
d. *Due lati e l'angolo compreso.*

Osservando però che la somma dei tre angoli di un triangolo è sempre eguale a due angoli retti, e che perciò conoscendo due angoli di un triangolo si trova il terzo deducendo da due angoli retti la somma dei due angoli dati, i casi *a* e *b* ne fanno un solo, ed i problemi da risolversi si riducono ai quattro seguenti:

1.° *Conoscendo un lato e due angoli costrurre il triangolo, o trovare gli altri due lati ed il terzo angolo.*

2.° *Dati due lati ed un angolo opposto ad uno di essi costrurre il triangolo, o trovare i due altri angoli ed il rimanente lato.*

3.° *Conoscendo due lati e l'angolo compreso fra i medesimi costrurre il triangolo, o trovare gli altri due angoli ed il terzo lato.*

4.° Finalmente *essendo cogniti i tre lati costrurre il triangolo, o trovare i tre angoli.*

La geometria elementare insegna a costrurre i triangoli sulla carta mediante la riga ed il compasso; la trigonometria insegna a trovare le incognite col mezzo del calcolo. La costruzione grafica di un triangolo non presenta alcuna seria difficoltà per chi possegga gli elementi della geometria piana; ci occuperemo tuttavia della costruzione de' triangoli onde poter stabilire, quando ne sarà il caso, un confronto fra questa operazione ed i risultati che otterremo in seguito impiegando il calcolo nella risoluzione generale dei triangoli.

Distingueremo d'ora in poi gli angoli dei triangoli colle grandi lettere A, B, C, ed i lati opposti a ciascuno di essi colle lettere piccole a, b, c.

66. **Costruzione dei triangoli rettangoli.** — Nei triangoli rettangoli l'angolo retto potendosi sempre considerare come

un dato, bastano altri due dati per compiere il numero indispensabile di tre.

I. Caso. *Data l'ipotenusa* a *e l'angolo acuto* B *costrurre il triangolo rettangolo* (fig. 1).

Sopra una retta indefinita si porti l'ipotenusa data da B in C, sopra BC come diametro si descriva un semicircolo, ed in B si faccia l'angolo $CBA = B$; si tiri finalmente la corda AC, ed il triangolo ABC sarà evidentemente il triangolo domandato.

II. Caso. *Dato un cateto* b *e l'angolo opposto* B, *costrurre il triangolo rettangolo* (fig. 2).

Dopo di aver portato sopra una retta indefinita il cateto b da C in A, in A e C s'innalzino due perpendicolari AN e CM, si faccia l'angolo $MCB = B$, sarà ABC il triangolo cercato.

Infatti $CA = b$, e l'angolo $CBA = MCB = B$.

III. Caso. *Costrurre un triangolo rettangolo conoscendo l'ipotenusa* a *ed uno dei due cateti* c (fig. 3).

Sopra $BC = a$ si descriva un semicircolo; centro in uno dei due estremi B, con un raggio eguale a c, si tagli in A la semicirconferenza; è chiaro che ABC sarà il triangolo rettangolo domandato.

IV. Caso. *Dati i due cateti* b e c, *costrurre il triangolo rettangolo* (fig. 4).

Si faccia l'angolo retto BAC, e sui lati di quest'angolo si portino i due cateti dati; il triangolo ABC sarà evidentemente il triangolo cercato.

Osservazioni sulla costruzione dei triangoli rettangoli. La costruzione del quarto caso è sempre possibile; quelle del primo e del secondo caso sono solo possibili quando l'angolo dato è minore dell'angolo retto, e la costruzione del terzo caso non sarebbe effettuabile se vi fosse $c > a$.

In ciascuna delle precedenti costruzioni, oltre al triangolo ABC (fig. 4), si possono ottenere tre altri triangoli ABC', ABC'' ed ABC''', eguali al primo, ma disposti diversamente rispetto alla linea AB. Nel rilevamento de' piani è di somma importanza il determinare esattamente da qual parte si trovi il punto considerato rispetto ad una data linea, onde non sorgano dubbi sulla precisa posizione del punto.

67. **Costruzione de' triangoli obbliquangoli.** — I. Caso. *Dato un lato* a *e due angoli* B *e* C, *od* A *e* B, *costrurre il triangolo* (fig. 5).

Se gli angoli dati fossero ambidue adiacenti al lato dato, si farebbero agli estremi del lato $BC=a$ i due angoli $CBA=B$, $BCA=C$, e ne risulterebbe il triangolo chiesto ABC; ma se è dato l'angolo A opposto al lato conosciuto, si cerchi l'angolo C nel seguente modo: sul prolungamento di BC si faccia l'angolo $MCN=B$, e su CN, l'angolo $NCA=A$; sarà evidentemente ACB il terzo angolo C del triangolo, poichè $ACB+ACN+NCM=2R$, chiamando R l'angolo retto. Se ora dal punto B si conduce BA parallela a CN, il triangolo ABC sarà quello domandato.

II. Caso. *Dati due lati* a *e* b, *e l'angolo* A *opposto al lato* a, *costrurre il triangolo* (fig. 6).

All'estremità A di $AC=b$ si faccia l'angolo $CAM=A$; poscia fatto centro all'altra estremità C, e con un raggio eguale al lato dato a, si descriva un arco che potrà tagliare AM in due punti B e B': i due triangoli ABC ed $AB'C$ rispondono alla questione.

III. Caso. *Dati due lati* a *e* b, *e l'angolo compreso* C, *costrurre il triangolo* (fig. 7).

Fatto l'angolo $MCN = C$, si porti b da C in A, ed a da C in B, e si uniscano i punti A e B; il triangolo ABC sarà evidentemente quello che si cerca.

IV. Caso. *Costrurre un triangolo conoscendo i suoi tre lati* a, b, c (fig. 8).

Fatto centro ad un estremo B di $BA = c$, e con un raggio $BC = a$, si descriva un arco indefinito; poscia fatto centro nell'altro estremo A, e con un raggio $AC = b$, si descriva un altro arco che tagli il primo in C; il triangolo ABC sarà il cercato.

Osservazioni sulle precedenti costruzioni. La costruzione del terzo caso è sempre possibile, la costruzione del primo lo è solo quando la somma dei due angoli dati è minore di due retti; quella del quarto caso non si potrebbe effettuare se uno dei tre lati fosse eguale o maggiore della somma degli altri due.

La costruzione del secondo caso merita una particolare attenzione:

1.° In alcune circostanze questo caso dà luogo a due soluzioni: ciò succede quando l'angolo A (fig. 6) essendo acuto, il lato a è maggiore della perpendicolare CD abbassata dall'estremità C di $AC = b$ sulla AM, e minore di b: si osservi ancora che nei due triangoli ABC, $AB'C$, gli angoli CBA, $CB'A$, valgono assieme due angoli retti; perchè nel triangolo isoscele BCB' v'ha angolo $CB'B = CBB'$.

2.° Quando il lato a è eguale alla perpendicolare CD l'arco descritto dal punto C come centro e con un raggio $CD = a$, è tangente alla AM, ed allora v'ha un solo triangolo ADC che è rettangolo in D.

3.° Quando $a < CD$ non v'ha alcuna soluzione, come è facile riconoscere.

4.° Se si avesse $a = b$, l'arco descritto dal centro C, col raggio a, taglierebbe la retta AM in A ed in un altro punto A', e ne risulterebbe un solo triangolo ACA' isoscele.

5.° L'angolo A essendo sempre acuto, se $a > b$, l'arco descritto da C come centro, e con raggio eguale ad a, taglia la retta AM (fig. 9) in due punti B e P, e sembra che si ottengano due soluzioni; ma ciò non è, poichè l'angolo CAP del triangolo CPA non è eguale all'angolo A, ed il solo triangolo ACB soddisfa alla questione.

6.° Finalmente se l'angolo A fosse ottuso, il lato a dovrebbe essere più grande del lato b, ed allora si avrebbe un solo triangolo; ma se vi fosse $a < b$ la costruzione sarebbe evidentemente impossibile.

68. **Vantaggi del calcolo numerico nella risoluzione de' triangoli.** — Se dopo di aver costrutto un triangolo coi metodi ora descritti si domandassero le lunghezze dei lati e le grandezze degli angoli che prima della costruzione non si conoscevano, si dovrebbe per la misura dei lati far uso del compasso e della scala, e per quella degli angoli sarebbe necessario di ricorrere al rapportatore grafico. Non parlando dei risultati che si otterrebbero impiegando quest'ultimo stromento per misurare gli angoli, i quali sarebbero ben poco prossimi al vero, è facile lo immaginarsi che l'approssimazione nella misura dei lati dipenderebbe in gran parte dalla ragione della scala di cui si farebbe uso. Infatti è certo che la nostra vista non ci permette di tener conto esattamente, nella stima delle lunghezze col compasso e la scala, dei decimillimetri; ora un decimillimetro alla scala di 1 a 2000 rappresenta $0^m,2$, alla scala di 1 a 5000 rappresenta $0^m,5$, a quella di 1 a 10000, 1^m, ecc.: gli errori che si commettono nella stima delle lunghezze sulla carta

aumentano dunque col diminuire della scala. Se perciò alla costruzione grafica dei triangoli si potesse sostituire il calcolo numerico onde trovare il valore delle incognite, si otterrebbe al certo un vantaggio immenso; poichè i calcoli numerici, indipendenti quali sono da ogni operazione meccanica, conducono a risultati la cui esattezza è solo limitata dalla maggiore o minore perfezione dello stromento geodetico impiegato nelle osservazioni fatte sul terreno.

Ora finchè nel calcolo trattasi soltanto di lunghezze è facile lo stabilire le relazioni esistenti fra i dati e le incognite che entrano nel problema da risolversi; ma nella massima parte delle questioni geodetiche la determinazione delle distanze dipende necessariamente dalla grandezza di uno o più angoli, e viceversa, ed i lati di un triangolo non essendo proporzionali agli angoli opposti, sembra assai difficile, anzi impossibile lo introdurre gli angoli nel calcolo. Questa difficoltà venne superata col sostituire agli angoli alcune linee rette che hanno fra loro e coi lati dei triangoli ai quali appartengono gli angoli considerati, delle relazioni facili a determinarsi, e che diconsi perciò linee *trigonometriche*. Quella parte delle matematiche che tratta delle linee trigonometriche chiamasi *Trigonometria*. Dicesi poi *rettilinea* quando si occupa solo della risoluzione dei triangoli rettilinei, e *sferica* quando ha per oggetto la risoluzione dei triangoli sferici.

69. **Algoritmo trigonometrico.** — Si supponga che in un circolo (fig. 10) i diametri AB, CD, sieno immobili e perpendicolari l'uno all'altro, e che il raggio OM, che faremo per maggior semplicità eguale all'unità, si muova in giro non abbandonando il centro O: questo raggio farà l'uno dopo l'altro gli angoli AOM, AOM', AOC, ecc., col

raggio fisso OA, i quali angoli hanno rispettivamente per misura gli archi AM, AM', AC, ecc. Consideriamo l'angolo AOM, o meglio l'arco AM; dal punto M si abbassi la perpendicolare MP sul diametro AB, e la perpendicolare MQ sul diametro CD, all'estremità A del diametro AB si conduca una tangente AT fino all'incontro del prolungamento del raggio OM, e dall'estremità C del diametro CD si tiri un'altra tangente CT' protratta fino all'incontro dello stesso prolungamento.

Ciò posto, sia arco $AM=a$, sarà arco $CM=90°-a$, e nel quarto di circolo AOC si distingueranno le seguenti linee trigonometriche.

$$PM = \text{seno } a = \text{sen } a$$

$$OP = \text{coseno } a = \cos a$$

$$AT = \text{tangente } a = \text{tang } a$$

$$OT = \text{secante } a = \sec a$$

$$CT' = \text{cotangente } a = \cot a$$

$$OT' = \text{cosecante } a = \text{cosec } a\ .$$

Il seno di un angolo o di un arco è dunque *la perpendicolare abbassata da una delle estremità dell'arco sul raggio che passa per l'altro estremo.* La figura dimostra che il seno di un arco è anche *la metà della corda che sottende l'arco doppio.*

Il coseno di un arco è la distanza dal piede della perpendicolare predetta al centro del circolo a cui appartiene l'arco.

La tangente di un arco è la perpendicolare innalzata all'estremità del raggio che passa per uno de' suoi punti estremi, prolungata fino all'incontro del prolungamento del raggio condotto per l'altro estremo.

La secante di un arco è la parte del raggio prolungato condotto per una delle estremità dell'arco fino all'incontro della tangente.

Siccome infine $OP = MQ$ (fig. 10), $MP = OQ$, e che l'arco CM è il complemento dell'arco $AM = a$ (§ 15), ne risulta *che il seno ed il coseno di un arco sono rispettivamente eguali al coseno ed al seno del complemento dell'arco, e che la cotangente e la cosecante di un arco sono rispettivamente eguali alla tangente ed alla secante del complemento dello stesso arco*; ciò che si esprime come segue:

$$\text{sen } a = \cos\,(90° - a)$$
$$\cos a = \text{sen}\,(90° - a)$$
$$\text{tang } a = \cot\,(90° - a)$$
$$\cot a = \text{tang}\,(90° - a)$$
$$\sec a = \text{cosec}\,(90° - a)$$
$$\text{cosec } a = \sec\,(90° - a)\,.$$

70. **Proprietà geometriche delle linee trigonometriche.** — Le linee trigonometriche hanno fra loro alcune relazioni facili a riconoscersi, che sono le seguenti:

Nel triangolo OPM rettangolo in P, v'ha

$$\overline{MP}^2 + \overline{PO}^2 = \overline{OM}^2\;;$$

dunque $$\text{sen}^2 a + \cos^2 a = 1\,. \qquad (1)$$

I due triangoli simili OPM, AOT, danno la proporzione

$$OP : PM :: OA : AT = OA \times \frac{PM}{OP}\;;$$

donde $$\text{tang } a = \frac{\text{sen } a}{\cos a}\,. \qquad (2)$$

Gli stessi triangoli danno pure la proporzione

$$OP:OM::OA:OT=OA\times\frac{OM}{OP};$$

dunque $$sec\,a=\frac{1}{cos\,a}. \quad (3)$$

I due triangoli simili OMQ ed $OT'C$ danno

$$OQ:QM::OC:CT'=OC\times\frac{QM}{OQ};$$

ossia $$cot\,a=\frac{cos\,a}{sen\,a}. \quad (4)$$

Dai medesimi triangoli si deduce

$$OQ:OM::OC:OT'=OC\times\frac{OM}{OQ};$$

perciò $$cosec\,a=\frac{1}{sen\,a}. \quad (5)$$

Finalmente dal triangolo OAT si ricava

$$\overline{OT}^2-\overline{AT}^2=\overline{OA}^2;$$

ossia $$sec^2 a-tang^2 a=1. \quad (6)$$

71. **Applicazioni delle precedenti proprietà.** — *Dato il seno di un arco si potranno sempre, colle prime cinque formole, trovare tutte le altre linee trigonometriche:* ed in generale, *conosciuta una delle sei linee trigonometriche sarà sempre possibile trovare le altre cinque.*

Sia, per esempio, l'arco di 30°; sarà

$$sen\,30°=\frac{1}{2},$$

poichè il seno di un arco è la metà della corda che sottende l'arco doppio (§ 69), e la corda che sottende un arco di 60° è eguale al raggio. La prima formola darà poi

$$\cos a = \sqrt{1 - \operatorname{sen}^2 a}\,,$$

e

$$\cos 30° = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{3}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}\,:$$

quindi dalla seconda formola si ricava

$$\operatorname{tang} 30° = \frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{1}{3}\sqrt{3}\,;$$

dalla terza si deduce

$$\sec 30° = \frac{1}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}} = \frac{2}{3}\sqrt{3}\,;$$

dalla quarta si ha

$$\cot 30° = \frac{\frac{1}{2}\sqrt{3}}{\frac{1}{2}} = \sqrt{3}\,;$$

dalla quinta finalmente si deduce

$$\operatorname{cosec} 30° = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2\,.$$

Si supponga, per secondo esempio, conosciuta la tangente di un arco a; dalla formola (2) si deduce

$$\operatorname{sen} a = \operatorname{tang} a \cos a\,;$$

trasportando questo valore di *sen a* nell'equazione (1), si avrà

$$(tang^2 a + 1) \cos^2 a = 1 ,$$

donde

$$\cos a = \frac{1}{\sqrt{tang^2 a + 1}} ;$$

e portando questo valore di *cos a* in quello trovato qui sopra per *sen a*, si otterrà

$$sen\, a = \frac{tang\, a}{\sqrt{tang^2 a + 1}} :$$

l'equazione (3) darà in seguito

$$\sec a = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt{tang^2 a + 1}}} = \sqrt{tang^2 a + 1} ;$$

dalla (4) si otterrà

$$\cot a = \frac{\cos a}{sen\, a} = \frac{1}{\frac{sen\, a}{\cos a}} = \frac{1}{tang\, a} ;$$

e dalla (5) si avrà finalmente

$$cosec\, a = \frac{1}{tang\, a \cos a} = \frac{\sqrt{tang^2 a + 1}}{tang\, a} .$$



LEZIONE QUARTA.

VALORI CORRELATIVI DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE. FORMOLE TRIGONOMETRICHE.

(letta il 7 marzo 1851.)

SIGNORI,

Un attento esame della figura 10.ª fin qui considerata fa conoscere che fra le linee trigonometriche hanvene di quelle che possono ricevere tutti i valori immaginabili da zero all'infinito, e queste sono le tangenti e le cotangenti; altre non possono avere valori minori del raggio del circolo a cui appartengono, esse sono le secanti e le cosecanti; i valori infine del seno e del coseno non possono oltrepassare il raggio stesso. V'ha di più, le linee trigonometriche possono appartenere ad archi minori di un quadrante, o maggiori del quadrante e minori della semicirconferenza, o maggiori della metà e minori dei tre quarti della circonferenza, o maggiori dei tre quarti e minori della circonferenza intera. Consacreremo una parte della presente lezione all'esame di questi diversi casi.

72. **Valori correlativi delle linee trigonometriche.** — Supponiamo che il punto M cammini sulla circonferenza partendo

da A e dirigendosi verso C, il raggio OA essendo eguale ad R: mentre M coincide con A si ha

$$arco = 0^\circ ,$$

$$sen\, 0^\circ = 0 , \quad cos\, 0^\circ = R , \quad tang\, 0^\circ = 0 ,$$

$$sec\, 0^\circ = R , \quad cot\, 0^\circ = \infty , \quad cosec\, 0^\circ = \infty .$$

La cotangente CT' essendo in questo caso parallela al raggio OA, incontrerà il prolungamento di questo raggio ad una distanza infinita, ciò che si esprime nel modo sovraindicato.

Aumentando quindi l'arco AM, il seno, la tangente e la secante evidentemente aumenteranno, mentre il coseno, la cotangente e la cosecante diminuiranno, finchè giunto M in C, si avrà:

$$arco = 90^\circ ,$$

$$sen\, 90^\circ = R , \quad cos\, 90^\circ = 0 , \quad tang\, 90^\circ = \infty ,$$

$$sec\, 90^\circ = \infty , \quad cot\, 90^\circ = 0 , \quad cosec\, 90^\circ = R .$$

Osserviamo intanto che prima di pervenire in C il punto M si è trovato in M', ove si aveva:

$$arco\, AM' = 90^\circ - a \quad (\S\ 69),$$

$$sen\ (90^\circ - a) = cos\ a ,$$

$$cos\ (90^\circ - a) = sen\ a ,$$

$$tang\ (90^\circ - a) = cot\ a ,$$

$$sec\ (90^\circ - a) = cosec\ a ,$$

$$cot\ (90^\circ - a) = tang\ a ,$$

$$cosec\ (90^\circ - a) = sec\ a .$$

E ciò si può anche facilmente dimostrare colla fig. 10.ª nel seguente modo: se *arco* $AM' = CM = 90° - a$, sarà *arco* $CM' = AM = a$; ed i triangoli rettangoli OMP, $OM'Q'$, essendo eguali per avere l'angolo $MOP = M'OQ' = a$, e le ipotenuse eguali, si avrà

$$M'P' = sen(90° - a) = OP = cos\, a\,,$$

$$OP' = cos\,(90° - a) = MP = sen\, a\,;$$

donde

$$tang\,(90° - a) = \frac{sen\,(90° - a)}{cos\,(90° - a)} = \frac{cos\, a}{sen\, a} = cot\, a\,, \text{ ecc.}$$

Se ora M continua ad avanzarsi oltre il punto C, l'arco aumentando diminuiranno il seno, la tangente e la secante, ed aumenteranno il coseno, la cotangente e la cosecante, poichè $sen\, AM'' = M''P'' < R$, $cos\, AM'' = OP'' > o$; $tang\, AM'' = AT'' < \infty$, $sec\, AM'' = OT'' < \infty$, $cot\, AM'' = CT''' > o$, $cosec\, AM'' = OT''' > R$; ma il seno $M''P''$ è diretto nello stesso senso del seno $M'P'$, mentre il coseno $P''O$ è diretto in senso affatto contrario a quello del coseno OP', ciò che non devesi trascurare, perchè questa circostanza è appunto quella che fa conoscere se un coseno appartenga ad un angolo maggiore o minore di 90°; per la qual cosa si è stabilito di considerare come positivi i coseni posti alla sinistra del diametro CD, e come negativi i coseni che cadono alla destra dello stesso diametro: per la stessa ragione si considerano come positivi i seni che trovansi al disopra, e negativi quelli che si trovano al disotto del diametro AB. Essendo poi $tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a}$,

$sec\,a = \frac{1}{cos\,a}$, $cot\,a = \frac{cos\,a}{sen\,a}$ e $cosec\,a = \frac{1}{sen\,a}$ (§ 70), si vede che se il seno ed il coseno hanno segni eguali, la tangente e la cotangente sono positive, e se il seno ed il coseno sono di segno contrario, la tangente e la cotangente sono negative, e che la secante ha sempre il segno del coseno, ed il segno del seno determina quello della cosecante.

Dunque per l'arco AM'' (fig. 10), il seno e la cosecante hanno il segno $+$, il coseno, la tangente, la secante e la cotangente devono avere il segno $-$. Ciò che si può per la tangente e la cotangente riconoscere dalla figura, poichè $tang\,AM'' = AT''$ è diretta in senso contrario di $AT = tang\,AM$, e $cot\,AM'' = AT'''$ è pure rivolta in senso contrario di $AT' = cot\,AM$: i segni della secante e della cosecante che seguono rispettivamente, come abbiam detto, le leggi di quelli del coseno e del seno, non si possono riconoscere dalla figura, come si è fatto pei segni delle altre linee trigonometriche: si può tuttavia osservare che ogniqualvolta una di queste due linee ha il segno positivo, uno degli estremi dell'arco si trova sulla linea stessa, come avviene in questo caso per la cosecante OT''' che passa per l'estremo M'' dell'arco; mentre che se il segno della linea è negativo, questo punto si trova sul suo prolungamento, come si osserva per la secante OT'' dell'arco AM'', per la quale il punto M'' si trova sul suo prolungamento.

Se pertanto supponiamo che il punto M sia pervenuto in M'', e che $arco\,AM'' = 90^\circ + a$, si avrà

$$sen\,(90^\circ+a) = sen\,(90^\circ-a) = cos\,a\,,$$
$$cos\,(90^\circ+a) = -cos\,(90^\circ-a) = -sen\,a\,,$$
$$tang\,(90^\circ+a) = -tang\,(90^\circ-a) = -cot\,a\,,$$
$$sec\,(90^\circ+a) = -sec\,(90^\circ-a) = -cosec\,a\,,$$
$$cot\,(90^\circ+a) = -cot\,(90^\circ-a) = -tang\,a\,,$$
$$cosec\,(90^\circ+a) = cosec\,(90^\circ-a) = sec\,a\,.$$

Infatti $M''P'' = M'P' = OP$,

$OP'' = -OP' = -MP$, ecc.

Quando M sarà giunto nel punto M''' tale che *arco* $AM''' = 180^\circ - a$, si troverà:

$$sen\,(180^\circ-a) = sen\,a\,,$$
$$cos\,(180^\circ-a) = -cos\,a\,,$$
$$tang\,(180^\circ-a) = -tang\,a\,,$$
$$sec\,(180^\circ-a) = -sec\,a\,,$$
$$cot\,(180^\circ-a) = -cot\,a\,,$$
$$cosec\,(180^\circ-a) = cosec\,a\,.$$

Poichè $M'''P''' = MP$, $OP''' = -OP$, ecc.

Giunto M in B, avrà descritto una semicirconferenza, cosicchè avremo

$$arco = 180^\circ,$$

$sen\,180^\circ = 0$, $cos\,180^\circ = -R$, $tang\,180^\circ = 0$,

$sec\,180^\circ = -R$, $cot\,180^\circ = -\infty$, $cosec\,180^\circ = \infty$.

Allorchè M si troverà in M^{IV}, sarà:

$$arco\ ACM^{IV} = 180° + a\ ,$$
$$sen\ (180° + a) = -sen\ a\ ,$$
$$cos\ (180° + a) = -cos\ a\ ,$$
$$tang\ (180° + a) = tang\ a\ ,$$
$$sec\ (180° + a) = -sec\ a\ ,$$
$$cot\ (180° + a) = cot\ a\ ,$$
$$cosec(180° + a) = -cosec\ a\ .$$

Per $arco\ ACBM^{V} = 270° - a$, v'ha:

$$sen\ (270° - a) = -cos\ a\ ,$$
$$cos\ (270° - a) = -sen\ a\ ,$$
$$tang\ (270° - a) = cot\ a\ ,$$
$$sec\ (270° - a) = -cosec\ a\ ,$$
$$cot\ (270° - a) = tang\ a\ ,$$
$$cosec(270° - a) = -sec\ a\ .$$

Per $arco\ ACBD = 270°$, si trova:

$$sen\ 270° = -R\ ,\quad cos\ 270° = 0\ ,\quad tang\ 270° = -\infty,$$
$$sec\ 270° = \infty\ ,\quad cot\ 270° = 0\ ,\quad cosec\ 270° = -R\ .$$

Se $arco\ ACBM^{VI} = 270 + a$, v'ha:

$$sen\ (270° + a) = sen\ (270° - a) = -cos\ a\ ,$$
$$cos\ (270° + a) = -cos\ (270° - a) = sen\ a\ ,$$
$$tang\ (270° + a) = -tang\ (270° - a) = -cot\ a\ ,$$
$$sec\ (270° + a) = -sec\ (270° - a) = cosec\ a\ ,$$
$$cot\ (270° + a) = -cot\ (270° - a) = -tang\ a,$$
$$cosec(270° + a) = cosec(270° - a) = -sec\ a\ .$$

Finalmente per *arco* $ACBM''' = 360 - a$, si trova:

$$\begin{aligned}
&sen\ (360° - a) = sen\ (-a) = -sen\ a\,,\\
&cos\ (360° - a) = cos\ (-a) = \ \ cos\ a\,,\\
&tang\ (360° - a) = tang\ (-a) = -tang\ a\,,\\
&sec\ (360° - a) = sec\ (-a) = \ \ sec\ a\,,\\
&cot\ (360° - a) = cot\ (-a) = -cot\ a\,,\\
&cosec\,(360° - a) = cosec(-a) = -cosec\,a\,.
\end{aligned}$$

Riepilogando conchiudiamo adunque che gli angoli od archi compresi fra 0° e 90° hanno tutte le loro linee trigonometriche positive, che quelli compresi fra 90° e 180° hanno positive il seno e la cosecante e tutte le altre linee trigonometriche negative; che quelli compresi fra 180° e 270° hanno positive le sole tangenti e cotangenti, e che finalmente gli archi o gli angoli compresi fra 270° e 360° hanno positive soltanto il coseno e la secante.

Si deve ancora conchiudere, da quanto si è fin qui osservato, che le linee trigonometriche di tutti gli archi immaginabili dipendono dai seni degli archi compresi nella prima metà del primo quadrante, cioè degli archi minori di 45°. Infatti già si è riconosciuto (§ 71) che dato il seno di un arco si possono ottenere, mediante le formole del § 70, le altre cinque linee trigonometriche; ma le linee di tutti gli archi da noi considerati percorrendo la circonferenza dipendono evidentemente da quelle dell'arco $a < 45°$: è adunque dimostrato che *le linee trigonometriche di tutti gli archi della circonferenza dipendono dai seni di quelli compresi nel primo mezzo quadrante.*

73. **Seno e coseno della somma e della differenza di due archi.** — Le cinque formole già da noi stabilite nella precedente lezione non bastano per calcolare le linee trigonometriche di tutti gli archi, ma è necessario di conoscere le relazioni esistenti fra le linee trigonometriche degli archi eguali alla somma ed alla differenza di due altri archi, e le linee trigonometriche di questi ultimi archi. Dalle formole che ne risulteranno, combinate colle proprietà geometriche delle linee trigonometriche, sarà poi facile dedurre altre formole importanti e necessarie sia al calcolo delle linee trigonometriche, sia alla risoluzione generale dei triangoli e delle questioni geodetiche.

Cercheremo adunque di determinare in primo luogo i seni ed i coseni della somma e della differenza di due archi, supponendo cogniti i seni ed i coseni di questi archi.

Sia C (fig. 11) il centro d'un circolo di raggio $CA=1$, sia $\text{arco}\, MN'=\text{arco}\, MN=b$, $\text{arco}\, AM=a$; sarà $\text{arco}\, NA=a+b$, $\text{arco}\, AN'=a-b$: si conoscono $MP=\text{sen}\, a$, $CP=\cos a$, $NR=\text{sen}\, b$, $CR=\cos b$; si cercano $NQ=\text{sen}\,(a+b)$, $CQ=\cos(a+b)$, $N'Q'=\text{sen}\,(a-b)$, $CQ'=\cos(a-b)$.

Da R si tirino RS perpendicolare ed RL parallela ad AC, e da N' si conduca $N'K$ parallela anche ad AC; si avrà

$$NQ=NL+LQ=NL+RS,$$
$$CQ=CS-SQ=CS-LR,$$
$$N'Q'=RS-RK=RS-NL,$$
$$CQ'=CS+SQ'=CS+LR.$$

Ora dai triangoli simili CMP, CRS si deducono le

seguenti proporzioni:

$$CM : MP :: RC : RS = \frac{MP.\,RC}{CM} = sen\ a \cos b\,,$$

$$CM : CP :: RC : CS = \frac{CP.\,RC}{CM} = \cos a \cos b\,.$$

I due triangoli simili CMP, RLN danno queste due altre proporzioni:

$$CM : MP :: RN : LR = \frac{MP.\,RN}{CM} = sen\ a\ sen\ b\,,$$

$$CM : CP :: RN : LN = \frac{CP.\,RN}{CM} = \cos a\ sen\ b\,.$$

Sostituendo nelle espressioni di NQ, CQ, $N'Q'$ e CQ' i loro valori, e quelli trovati mediante queste quattro proporzioni per NL, CS, RS ed LR, si troverà finalmente:

$$\left.\begin{aligned} sen\,(a+b) &= sen\ a \cos b + sen\ b \cos a \\ \cos\,(a+b) &= \cos a \cos b - sen\ a\ sen\ b \\ sen\,(a-b) &= sen\ a \cos b - sen\ b \cos a \\ \cos\,(a-b) &= \cos a \cos b + sen\ a\ sen\ b \end{aligned}\right\} \text{(A).}$$

74. **Formole dedotte dalle precedenti.** — Se nella prima e nella seconda di queste quattro equazioni si fa $a=b$, e si osserva che dalla formola (1), si deduce $sen^2 a = 1 - \cos^2 a$, e $\cos^2 a = 1 - sen^2 a$; si trova:

$$\left.\begin{aligned} sen\ 2a &= 2 sen\ a \cos a \\ \cos 2a &= \cos^2 a - sen^2 a \\ &= 2\cos^2 a - 1 \\ &= 1 - 2 sen^2 a \end{aligned}\right\} \text{(B).}$$

Con queste equazioni si ottengono il seno ed il coseno del doppio di un arco, allorchè si conoscono il seno ed il coseno dell'arco.

Se nelle equazioni (B) si fa $2a = a$, sarà $a = \frac{1}{2}a$, e si trasformeranno nelle seguenti

$$\left.\begin{aligned} sen\, a &= 2\, sen \frac{1}{2}a \cos \frac{1}{2}a \\ \cos a &= \cos^2 \frac{1}{2}a - sen^2 \frac{1}{2}a \\ &= 2 \cos^2 \frac{1}{2}a - 1 \\ &= 1 - 2\, sen^2 \frac{1}{2}a \end{aligned}\right\} \text{(C)}.$$

Dai due ultimi valori di $\cos a$ delle equazioni (C), si deduce

$$2 \cos^2 \frac{1}{2}a = \cos a + 1\ ,$$

$$2\, sen^2 \frac{1}{2}a = 1 - \cos a\ ;$$

donde, dividendo per 2 ed estraendo le radici quadrate, si dedurranno le seguenti rimarchevoli equazioni, che danno i valori del seno e del coseno della metà d'un arco in funzione del coseno dell'arco.

$$\left.\begin{aligned} \cos \frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{\cos a + 1}{2}} \\ sen \frac{1}{2}a &= \sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}} \end{aligned}\right\} \text{(D)}.$$



LEZIONE QUINTA.

FORMOLE TRIGONOMETRICHE. CALCOLO DELLE LINEE TRIGONOMETRICHE.

(letta il 9 marzo 1854.)

SIGNORI,

Dalle formole (A), (B), (C) e (D) trovate nella precedente lezione ne dedurremo ora alcune altre non meno importanti.

75. **Tangenti della somma e della differenza di due archi, del doppio e della metà di un arco.** — Dalla relazione $tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a}$, si deduce, facendo successivamente $a = a + b$, ed $a = a - b$,

$$tang(a+b) = \frac{sen(a+b)}{cos(a+b)},$$

$$tang(a-b) = \frac{sen(a-b)}{cos(a-b)};$$

e mettendo invece di $sen(a+b)$, $cos(a+b)$, $sen(a-b)$ e $cos(a-b)$, i loro valori dati dalle equazioni (A), si otterrà:

$$tang(a+b) = \frac{sen\, a\, cos\, b + sen\, b\, cos\, a}{cos\, a\, cos\, b - sen\, a\, sen\, b},$$

$$tang(a-b) = \frac{sen\, a\, cos\, b - sen\, b\, cos\, a}{cos\, a\, cos\, b + sen\, a\, sen\, b};$$

dividendo i numeratori ed i denominatori dei secondi membri di queste due equazioni per $\cos a \cos b$, sopprimendo i fattori comuni ed osservando che $\frac{\operatorname{sen} a}{\cos a} = \operatorname{tang} a$, $\frac{\operatorname{sen} b}{\cos b} = \operatorname{tang} b$, si avrà:

$$\left.\begin{aligned} \operatorname{tang}(a+b) &= \frac{\operatorname{tang} a + \operatorname{tang} b}{1 - \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}, \\ \operatorname{tang}(a-b) &= \frac{\operatorname{tang} a - \operatorname{tang} b}{1 + \operatorname{tang} a \operatorname{tang} b}. \end{aligned}\right\} \quad \text{(E)}$$

Se nella prima di queste due equazioni si fa $a = b$, essa diventa:

$$\operatorname{tang} 2a = \frac{2 \operatorname{tang} a}{1 - \operatorname{tang}^2 a}. \quad \text{(F)}$$

Se nella relazione $\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \frac{\operatorname{sen} \frac{1}{2} a}{\cos \frac{1}{2} a}$ si sostituiscono ai primi, i secondi membri delle equazioni (D), si ottiene:

$$\operatorname{tang} \frac{1}{2} a = \frac{\sqrt{\frac{1 - \cos a}{2}}}{\sqrt{\frac{1 + \cos a}{2}}} = \sqrt{\frac{1 - \cos a}{1 + \cos a}},$$

donde, moltiplicando il numeratore ed il denominatore della parte posta sotto al radicale, prima per $1 - \cos a$, poscia per $1 + \cos a$, si deducono le due espressioni seguenti:

$$\tang \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{1-\cos^2 a}} = \sqrt{\frac{(1-\cos a)^2}{\sen^2 a}},$$

$$\tang \frac{1}{2}a = \sqrt{\frac{1-\cos^2 a}{(1+\cos a)^2}} = \sqrt{\frac{\sen^2 a}{(1+\cos a)^2}};$$

ossia

$$\left.\begin{aligned} \tang \frac{1}{2}a &= \frac{1-\cos a}{\sen a}, \\ \tang \frac{1}{2}a &= \frac{\sen a}{1+\cos a}. \end{aligned}\right\} \quad (G)$$

76. **Formole per ridurre le somme e le differenze dei seni e dei coseni in prodotti ed in quozienti.** — Combinando successivamente mediante addizione e sottrazione la prima e la terza delle equazioni (A), e la seconda e quarta, si ottengono le nuove equazioni che seguono:

$$\left.\begin{aligned} \sen(a+b) + \sen(a-b) &= 2\sen a \cos b, \\ \sen(a+b) - \sen(a-b) &= 2\sen b \cos a, \\ \cos(a+b) + \cos(a-b) &= 2\cos a \cos b, \\ \cos(a-b) - \cos(a+b) &= 2\sen a \sen b. \end{aligned}\right\} \quad (H)$$

Se ora si suppone $a+b=p$,

$a-b=q$,

si trova, per addizione $2a=p+q$,

e per sottrazione $2b=p-q$;

donde $a=\frac{1}{2}(p+q)$; $b=\frac{1}{2}(p-q)$:

Portando questi valori di $a+b$, di $a-b$, e di a e b nelle equazioni (H), ne risultano le seguenti:

$$\left.\begin{aligned} sen\,p + sen\,q &= 2\,sen\,\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)\,,\\ sen\,p - sen\,q &= 2\,sen\,\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)\,,\\ \cos q + \cos p &= 2\cos\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)\,,\\ \cos q - \cos p &= 2\,sen\,\frac{1}{2}(p+q)\,sen\,\frac{1}{2}(p-q)\,. \end{aligned}\right\}\quad (I)$$

Se si moltiplicano membro a membro le due prime equazioni (I), si trova

$$\begin{aligned} sen^2 p - sen^2 q &= 2\,sen\,\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p-q)\\ &\quad\times 2\,sen\,\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p+q)\\ &= 2\,sen\,\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p+q)\\ &\quad\times 2\,sen\,\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p-q): \end{aligned}$$

ma dalla prima delle equazioni (C), si deduce, col sostituire $p+q$ e $p-q$ ad a e b.

$$2\,sen\,\frac{1}{2}(p+q)\cos\frac{1}{2}(p+q) = sen\,(p+q)\,,$$

$$2\,sen\,\frac{1}{2}(p-q)\cos\frac{1}{2}(p-q) = sen\,(p-q)\,;$$

si ha adunque:

$$sen^2 p - sen^2 q = sen(p+q)\, sen(p-q). \qquad (K)$$

Finalmente col dividere la prima delle equazioni (I) per la seconda, e la terza per la quarta, ed osservando che

$$\frac{sen\frac{1}{2}(p+q)}{cos\frac{1}{2}(p+q)} = tang\frac{1}{2}(p+q), \quad \frac{sen\frac{1}{2}(p-q)}{cos\frac{1}{2}(p-q)} = tang\frac{1}{2}(p-q),$$

e $\dfrac{cos\frac{1}{2}(p+q)}{sen\frac{1}{2}(p+q)} = cot\frac{1}{2}(p+q)$, si ottiene:

$$\left.\begin{aligned} \frac{sen\, p + sen\, q}{sen\, p - sen\, q} &= \frac{tang\frac{1}{2}(p+q)}{tang\frac{1}{2}(p-q)}, \\ \frac{cos\, q + cos\, p}{cos\, q - cos\, p} &= \frac{cot\frac{1}{2}(p+q)}{tang\frac{1}{2}(p-q)}. \end{aligned}\right\} \qquad (L)$$

Nelle applicazioni della trigonometria si ottengono spesso delle formole che contengono delle somme e delle differenze di seni e di coseni, per le quali non è possibile impiegare i logaritmi; esse devono adunque trasformarsi in altre che contengano solo de' prodotti e de' quozienti; ciò che si ottiene mediante le equazioni (H), (I), (K) ed (L).

77. Correzioni da farsi alle formole trigonometriche nel caso di un raggio non eguale all'unità. — Si è finora supposto che il raggio del circolo nel quale si consideravano le linee trigo-

nometriche fosse eguale ad *uno*: se esse appartenessero ad un circolo di raggio qualsiasi R, differente dall'unità, si dovrebbe introdurre questo raggio nelle formole, osservando che le linee trigonometriche di ugual nome, corrispondenti ad angoli al centro uguali, in due circoli diversi l'uno dall'altro, sono proporzionali ai raggi de' circoli a cui appartengono.

Così chiamando A ed a due archi simili, o che abbracciano lo stesso numero di gradi sulle circonferenze aventi rispettivamente per raggi R ed 1, si avrebbe:

$$R : 1 :: sen\,A : sen\,a = \frac{sen\,A}{R}\ ;$$

ciò che dimostra *essere le linee trigonometriche appartenenti ad un circolo di raggio* uno, *eguali ai rapporti fra le linee corrispondenti di un circolo di raggio* R *e questo raggio.*

Ciò posto, essendo

$$sen^2 a + cos^2 a = 1\ ;$$

si avrà
$$\frac{sen^2 A}{R^2} + \frac{cos^2 A}{R^2} = 1\ ,$$

ossia
$$sen^2 A + cos^2 A = R^2\ ;$$

da $tang\,a = \frac{sen\,a}{cos\,a}$, si deduce

$$\frac{tang\,A}{R} = \frac{sen\,A}{cos\,A}\ ,\ \text{ovvero}\ tang\,A = \frac{R\,sen\,A}{cos\,A}\ ;$$

la formola

$$sen\,(a+b) = sen\,a\,cos\,b + sen\,b\,cos\,a\ ,$$

si trasformerebbe nella seguente:

$$\frac{sen(A+B)}{R}=\frac{sen\,A\cos B}{R^2}+\frac{sen\,B\cos A}{R^2},$$

cioè $$sen(A+B)=\frac{sen\,A\cos B+sen\,B\cos A}{R};$$

l'equazione $$tang\,(a+b)=\frac{tang\,a+tang\,b}{1-tang\,a\,tang\,b},$$

diverrebbe $$\frac{tang\,(A+B)}{R}=\frac{\frac{tang\,A}{R}+\frac{tang\,B}{R}}{1-\frac{tang\,A\,tang\,B}{R^2}},$$

che togliendo il fattore $\frac{1}{R}$ comune ai due membri, si trasforma in

$$tang\,(A+B)=\frac{tang\,A+tang\,B}{1-\frac{tang\,A\,tang\,B}{R^2}},$$

e moltiplicando finalmente il numeratore ed il denominatore del secondo membro di quest'ultima equazione per R^2, si ottiene:

$$tang(A+B)=\frac{R^2(tang\,A+tang\,B)}{R^2-tang\,A\,tang\,B}\ \text{. ecc.}$$

78. **Tavole delle linee trigonometriche.** — Siamo ora in grado di farci un'idea abbastanza chiara dei metodi impiegati nella costruzione delle *tavole trigonometriche;* ossia di quelle tavole che contengono in una colonna gli archi da 0° a 45°, ed in altre colonne il seno, il coseno, la tangente e la cotangente di ciascun arco. I seni, i coseni, le tangenti e le cotangenti sono le sole linee che si pongano nelle tavole,

per essere le sole che vengano impiegate nella risoluzione dei triangoli; anzi, potendosi facilmente col mezzo del seno di un arco ottenere le altre linee trigonometriche, basterebbe che le tavole contenessero i soli seni.

Generalmente nelle tavole si mettono soltanto le linee trigonometriche degli archi compresi fra 0° e 45°, perchè, come si è altra volta dimostrato, i seni, i coseni, le tangenti e le cotangenti di tutti gli archi del circolo dipendono da quelli contenuti nel primo mezzo quadrante (§ 72).

Supponiamo ora che si voglia costrurre una tavola la quale contenga le linee trigonometriche degli archi da 0° a 45°, partendo dall'arco di 1″.

79. **Calcolo del seno di 1″.** — Il seno di 1″ si trova mediante le seguenti considerazioni:

I. *Un arco minore di 90° è sempre maggiore del suo seno, e minore della sua tangente.*

Infatti: 1.° la corda AB (fig. 12) è sempre minore dell'arco da essa sotteso; ma la perpendicolare BP è più breve dell'obbliqua AB: dunque a più forte ragione il seno è più piccolo dell'arco:

2.° L'area del settore OAB è minore dell'area del triangolo OAT; ossia:

$$\text{arco}\, AB \times OA < AT \times OA;$$

donde togliendo il fattore comune OA, rimane

$$\text{arco}\, AB < AT:$$

dunque la lunghezza della tangente è maggiore dello sviluppo dell'arco.

Si scorge inoltre dalla stessa figura, che quanto più l'arco diminuisce, tanto maggiormente le lunghezze della tangente

e del seno tendono a divenir uguali fra loro ed allo sviluppo dell'arco: ciò si rende più evidente colla formola $tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a}$, dalla quale si deduce $\frac{tang\, a}{sen\, a} = \frac{1}{cos\, a}$, poichè se si suppone che l'arco si avvicini sempre più a zero, il coseno differirà sempre meno dall'unità, ed allorquando sarà l'arco divenuto minore di qualsivoglia grandezza data, si avrà $cos\, a = 1$, e $tang\, a = sen\, a$; donde si conchiuderà $tang\, a = arco\, a$, e $sen\, a = arco\, a$.

II. *La tangente diminuisce più rapidamente del seno:*

Infatti sappiamo che quando un angolo acuto diminuisce, il suo seno e la sua tangente diminuiscono pure, ed il suo coseno aumenta: ma l'equazione

$$tang\, a = \frac{sen\, a}{cos\, a} \text{ dà } tang\, a\, cos\, a = sen\, a\,,$$

perciò, se $sen\, a$ diminuisce, il prodotto $tang\, a\, cos\, a$ diminuirà nello stesso rapporto; ma il fattore $cos\, a$ aumenta, dunque l'altro fattore $tang\, a$ diminuisce più di quello che diminuisca $sen\, a$.

Ciò posto, e potendosi sempre calcolare lo sviluppo di un arco dato in gradi, minuti ecc., mediante il rapporto della circonferenza al diametro ed il raggio del circolo in cui si considerano gli archi, se si assumerà lo sviluppo di un arco piccolissimo per seno dello stesso arco, l'errore commesso sarà pure tenuissimo.

La geometria insegna che essendo il diametro eguale all'unità, la circonferenza è

$$3,\ 14159\ 26535\ 89793\ 2\ldots$$

e se si prende per unità il raggio, tale numero rappresenterà la semicirconferenza o l'arco di 180°.

Dunque:

arco 90° = 1, 57079 63267 94896 6....
» 9° = 0, 15707 96326 79489 66...
» 1° = 0, 01745 32925 19943 29...
» 1′ = 0, 00029 08882 08665 72...
» 1″ = 0, 00000 48481 36811 09...

Si supponga che questo valore dell'arco di 1″ sia quello del seno dello stesso arco; se prendendo le mosse da questo valore di *sen* 1″, che è troppo grande, si deduce quello di *tang* 1″ mediante la formola

$$tang\, 1'' = \frac{sen\, 1''}{cos\, 1''} = \frac{sen\, 1''}{\sqrt{1 - sen^2\, 1''}},$$

si troverà il valore troppo grande di

tang 1″ = 0, 00000 48481 36811 15...

V'ha adunque:

sen 1″ < 0, 00000 48481 36811 09...
arco 1″ = 0, 00000 48481 36811 09...
tang 1″ < 0, 00000 48481 36811 15...

Le prime quindici decimali di queste tre espressioni essendo uguali, se si prende per *sen* 1″ la parte

0, 00000 48481 36811,

l'errore sarà minore d'un'unità del quindicesimo ordine decimale.

Infatti aumentando l'ultima cifra di *uno*, il seno diverrebbe più grande dell'arco, ciò che non può essere; se si diminuisce l'ultima cifra di *uno*, la tangente che diminuisce più celeremente del seno diverrebbe minore dell'arco, ciò che è assurdo: dunque l'errore commesso assumendo

$$0,\ 00000\ 48481\ 36811,$$

quale lunghezza di $sen\ 1''$, in un circolo di raggio *uno*, è minore dell'unità decimale del quindicesimo ordine.

Il seno di $1''$ dà immediatamente il coseno di $1''$ col mezzo della formola

$$\cos a = \sqrt{1 - sen^2 a}\ ;$$

conoscendo i valori di $sen\ 1''$ e di $\cos 1''$ si otterranno quelli dei seni e dei coseni di $2''$, $3''$, $4''$ ecc., facendo successivamente $a = 1''$, $b = 1''$, $2''$, $3''$, $4''$ ecc., fino a $162000''$ o $45°$, nelle equazioni (B) ed (A). Si dedurranno poscia facilmente le altre linee trigonometriche colle formole

$$tang\ a = \frac{sen\ a}{\cos a}, \quad \cot a = \frac{\cos a}{sen\ a} = \frac{1}{tang\ a}.$$

80. **Tavole dei logaritmi delle linee trigonometriche.** — Siccome in tutte le applicazioni della trigonometria s'impiegano ne' calcoli i logaritmi, si dovette porre nelle tavole, non i seni, i coseni ecc., ma i loro logaritmi; ed essendo i seni ed i coseni sempre minori del raggio, supponendo questo raggio eguale all'unità, i logaritmi di queste linee sarebbero tutti negativi, mentre quelli delle tangenti e delle cotangenti sarebbero parte negativi e parte positivi. Onde evitare questo inconveniente si fece il raggio delle tavole eguale a $10^{10} = 10\ 000\ 000\ 000$; donde ne segue che per ottenere

i logaritmi delle linee trigonometriche nel caso di $R = 10^{10}$, supponendo digià calcolati quelli corrispondenti ad $r = 1$, si devono aumentare questi di 10.

Infatti, sieno *sen a'*, *cos a'*, i seni corrispondenti ad $R = 10^{10}$, si avrà:

$$sen\,a : sen\,a' :: 1 : 10^{10}\,,$$

$$cos\,a : cos\,a' :: 1 : 10^{10}\,;$$

donde

$$sen\,a' = 10^{10}\,sen\,a\,,$$

$$cos\,a' = 10^{10}\,cos\,a\,;$$

ed applicando i logaritmi:

$$log\,sen\,a' = log\,sen\,a + 10\,,$$

$$log\,cos\,a' = log\,cos\,a + 10\,.$$

Con questo artifizio tutti i logaritmi delle linee trigonometriche, anche quelli dei più piccoli archi, sono positive. Infatti, si prenda *sen* 1'', si troverà:

$$log\,sen\,1'' = log\,0,\,00000\,48481\,368$$
$$= log\,48481,\,368 - 10\,;$$

e le tavole ordinarie daranno

$$log\,sen\,1'' = log\,48481,\,368 - 10 + 10$$
$$= log\,48481,\,368 = 4,\,6855749\,.$$

I logaritmi delle tavole trigonometriche ordinarie hanno inoltre il vantaggio di essere i complementi aritmetici dei logaritmi calcolati nell'ipotesi del raggio eguale ad *uno*.

Considerati sotto questo aspetto essi non differiscono dai logaritmi delle frazioni decimali, e si avrà, per esempio:

$$\log\ 0,1 = 9,000\ 0000 = \log \operatorname{sen} 5^\circ\ 44'\ 21''\ 02\ ,$$

$$\log\ 0,01 = 8,000\ 0000 = \log \operatorname{sen} 0.\ 34.\ 22,\ 69\ ,$$

$$\log\ 0,001 = 7,000\ 0000 = \log \operatorname{sen} 0.\ 3.\ 26,\ 26\ ,$$

$$\log\ 0,0001 = 6,000\ 0000 = \log \operatorname{sen} 0.\ 0.\ 20,\ 63\ ,$$

ecc. ecc. ecc.

Le tavole trigonometriche portano in fronte a ciascuna pagina e ad ogni colonna delle intitolazioni che rendono abbastanza chiara la distribuzione delle quantità in esse contenute, senza che sia necessaria a questo proposito una particolare descrizione, e quanto si è detto intorno alle medesime e qualche applicazione che faremo in seguito sopra alcuni esempi numerici nella risoluzione de' triangoli, basteranno alla risoluzione dei due seguenti problemi analoghi a quelli già esposti riguardo ai logaritmi de' numeri:

1.° *Dato un arco in gradi, minuti ecc., trovare il logaritmo d'una qualsiasi delle sue linee trigonometriche;*

2.° *Reciprocamente, dato il logaritmo d'una linea trigonometrica, trovare l'arco corrispondente.*

LEZIONE SESTA.

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI RETTANGOLI. PRINCIPII PER LA RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI OBBLIQUANGOLI.

(letta l'11 marzo 1851.)

SIGNORI,

Abbiamo digià riconosciuto (§. 65) che dati tre de' sei elementi di un triangolo si possono sempre trovare gli altri tre, purchè fra i dati siavi almeno un lato. Ci occuperemo ora della risoluzione generale dei triangoli, incominciando da quelli che hanno un angolo retto.

Prima di considerare in particolare ognuno de' quattro casi de' triangoli rettangoli, è necessario determinare le relazioni esistenti fra i lati e le linee trigonometriche degli angoli di ciascuno di tali triangoli.

81. **Principii per la risoluzione dei triangoli rettangoli.** — 1.° Negli elementi della geometria si dimostra, *che in qualsivoglia triangolo rettangolo, il quadrato dell'ipotenusa è uguale alla somma dei quadrati de' due cateti.*

Detti adunque b e c i due cateti, ed a l'ipotenusa, v'ha

$$a^2 = b^2 + c^2, \quad \text{ed} \quad a = \sqrt{b^2 + c^2}.$$

2.° *In ogni triangolo rettangolo il coseno di uno degli angoli acuti è uguale al lato adiacente diviso per l'ipotenusa:*

p

Nel triangolo rettangolo ABC (fig. 13), fatto centro in B, e con un raggio $BM=1$, si descriva l'arco MN; se da M si abbassa la perpendicolare MP sul lato AB, sarà $MP = sen\,B$, $PB = cos\,B$; ma essendo MP parallela ad AC, v'ha la proporzione:

$$BC : BM :: AB : BP\,;$$

ossia

$$a : 1 :: c : cos\,B = \frac{c}{a}\,;$$

ciò che dovevasi dimostrare.

Dalla medesima figura si deduce ancora la seguente proporzione:

$$BC : BM :: AC : MP\,;$$

ovvero

$$a : 1 :: b : sen\,B = \frac{b}{a}\,.$$

Dunque 3.° *In ogni triangolo rettangolo il seno di uno degli angoli acuti è uguale al quoziente del lato opposto a quest'angolo diviso per l'ipotenusa.*

Dividendo $sen\,B$ per $cos\,B$, v'ha

$$\frac{sen\,B}{cos\,B} = tang\,B\,;$$

e mettendo invece di $sen\,B$ e di $cos\,B$ i loro valori trovati colle precedenti proporzioni si ottiene:

$$tang\,B = \frac{b}{a} : \frac{c}{a} = \frac{b}{a} \times \frac{a}{c} = \frac{b}{c}\,.$$

Dunque 4.° *La tangente d'uno degli angoli acuti di un triangolo rettangolo è uguale al lato opposto diviso per il lato adiacente.*

Quest'ultimo teorema si può anche dimostrare direttamente come segue:

Si descriva nel triangolo rettangolo ABC (fig. 14), col centro in B, un arco MN di raggio $BM=1$, ed in N s'innalzi ad AB la perpendicolare NT; sarà $TN=tang\,B$; ma essendo TN parallela ad AC, v'ha la proporzione:

$$AB:BN::AC:TN\,,$$

ossia

$$c:1::b:tang\,B\,,$$

dunque

$$tang\,B=\frac{b}{c}\,.$$

I quattro precedenti teoremi bastano alla risoluzione di tutti i casi dei triangoli rettangoli.

82. **Risoluzione dei triangoli rettangoli.** — I. Caso. *È data l'ipotenusa* a *e l'angolo acuto* B, *trovare l'angolo* C *e i lati* b *e* c.

V'ha in primo luogo

$$C=90°-B\,;$$

poscia il secondo ed il terzo principio danno:

$$b=a\,sen\,B\,,$$

$$c=a\,cos\,B\,;$$

ed impiegando i logaritmi:

$$log\,b=log\,a+log\,sen\,B-10\,,$$

$$log\,c=log\,a+log\,cos\,B-10\,.$$

II. Caso. *Dato uno dei due cateti* b *ed uno degli angoli acuti* B, *trovare* c, a, *e* C.

$$C=90^{\circ}-B\ ;$$

quindi i teoremi terzo e quarto danno:

$$a=\frac{b}{sen\,B}\ ,\qquad c=\frac{b}{tang\,B}\ ;$$

ed impiegando i logaritmi:

$$log\,a=log\,b+compl.\,log\,sen\,B\ ,$$

$$log\,c=log\,b+compl.\,log\,tang\,B\ .$$

III. Caso. *Data l'ipotenusa* a *ed uno dei cateti* b, *trovare* B, C, *e* c.

Dal terzo teorema si ha:

$$sen\,B=\frac{b}{a}\ ;$$

e mediante i logaritmi:

$$log\,sen\,B=log\,b+compl.\,log\,a\ ;$$

poscia v'ha $C=90^{\circ}-B$;

infine dal secondo teorema si deduce:

$$c=a\cos B\ ;$$

donde $log\,c=log\,a+log\,cos\,B-10$.

Si possono verificare i calcoli facendo uso del primo teorema, dal quale si ricava:

$$c^2=a^2-b^2=(a+b)(a-b)\ ;$$

e coi logaritmi:

$$log\,c=\frac{1}{2}[\,log\,(a+b)+log\,(a-b)]\ .$$

IV. Caso. *Dati i due cateti* b *e* c, *trovare* B, C, *ed* a.

Il quarto principio dà $tang\,B=\frac{b}{c}$; ed impiegando i logaritmi:

$$log\;tang\,B=log\,b+compl.\;log\,c\;:$$

quindi $C=90^\circ-B$;

finalmente dal terzo teorema si deduce:

$$a=\frac{b}{sen\,B};$$

donde $log\,a=log\,b+compl.\;log\;sen\,B$;

oppure dal secondo,

$$a=\frac{c}{cos\,B};$$

ossia: $log\,a=log\,c+compl.\;log\;cos\,B$.

82. **Principii per la risoluzione dei triangoli obbliquangoli.** — 1.° *In qualsivoglia triangolo rettilineo i seni degli angoli stanno fra loro come i lati opposti:*

Se in un triangolo ABC, acutangolo (fig. 15) od ottusangolo (fig. 16), si abbassa da uno de' suoi vertici C, sul lato opposto AB, la perpendicolare CD, i due triangoli rettangoli ACD, CDB daranno:

$$1 : sen\,A :: b : CD=b\;sen\,A\,,$$
$$1 : sen\,B :: a : CD=a\;sen\,B\;;$$

dunque $b\;sen\,A=a\;sen\,B$:

epperciò $sen\,A : sen\,B :: a : b$.

Si troverebbe in modo analogo:

$$sen\,A : sen\,C :: a : c\,;$$

dunque $\quad sen\,A : sen\,B : sen\,C :: a : b : c\,.$

Se l'angolo B fosse ottuso (fig. 16) le proporzioni antecedenti non cesserebbero di esistere, ma l'espressione *sen B* indicherebbe allora l'angolo esterno CBD, e siccome esso è il supplemento dell'angolo interno CBA, e che gli angoli supplementari hanno lo stesso seno, si ricadrebbe nel caso di un triangolo acutangolo.

2.° *In qualsivoglia triangolo rettilineo il quadrato di uno de' suoi lati è uguale alla somma dei quadrati degli altri due lati, diminuita del doppio prodotto di questi due lati pel coseno dell'angolo fra essi compreso:*

Nel triangolo ABC (fig. 15) si chiamino x ed y il segmento DB adiacente all'angolo B, e la perpendicolare CD abbassata dal vertice C sul lato opposto AB; si avrà $AD = c - x$; e dai triangoli rettangoli ADC e CDB si dedurrà:

$$y^2 = b^2 - (c - x)^2\,,$$

$$y^2 = a^2 - x^2\,.$$

Eguagliando questi due valori di y^2 si ottiene:

$$b^2 - (c^2 - 2cx + x^2) = a^2 - x^2\,,$$

ossia $\quad b^2 = a^2 + c^2 - 2cx\,.$

Ma nel triangolo rettangolo CDB v'ha pure (§ 81, *teor.* 2.°):

$$\cos B = \frac{x}{a}\,, \quad \text{donde } x = a\cos B\,;$$

e sostituendo nell'espressione di b^2 questo valore di x, si ha finalmente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B .$$

Ciò che dovevasi dimostrare.

Si è in questa dimostrazione supposto che l'angolo B fosse acuto; se quest'angolo all'opposto fosse ottuso (fig. 16), invece dell'equazione:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2cx ;$$

si troverebbe $\quad b^2 = a^2 + c^2 + 2cx$:

ma l'angolo B nell'equazione

$$x = a\cos B ,$$

non sarebbe più l'angolo CBA del triangolo, ma il suo supplemento CBD, e gli angoli supplementari avendo i coseni uguali ma di segno contrario (§ 72), si dovrebbe fare

$$x = -a\cos B ;$$

e portando quest'ultimo valore di x nella precedente equazione, si avrebbe nuovamente:

$$b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B ,$$

come nel caso di B acuto.

Questa verità essendo dimostrata sia per un lato opposto ad un angolo acuto, sia per un lato opposto ad un angolo ottuso, si avranno sempre le tre seguenti equazioni fra i sei elementi componenti un triangolo:

$$\left.\begin{array}{l} a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A , \\ b^2 = a^2 + c^2 - 2ac\cos B , \\ c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C . \end{array}\right\} \quad (M)$$

83. **Osservazioni intorno al teorema precedente.** — Queste tre equazioni potrebbero bastare alla risoluzione di tutte le questioni sui triangoli, poichè col loro mezzo, conosciuti tre degli elementi di un triangolo, è evidente che si possono trovare gli altri tre, purchè fra i dati siavi almeno un lato: ma essendo nell'attuale loro forma disadatte al calcolo logaritmico, si modificano secondo i casi.

Si può facilmente riconoscere che le equazioni (M) contengono implicitamente i quattro teoremi che servirono alla risoluzione dei triangoli rettangoli, ed il primo teorema dei triangoli obbliquangoli, come ora dimostreremo:

Se si suppone $A=90°$, essendo $\cos A=\cos 90°=0$, esse si trasformano nella seguente:

$$a^2=b^2+c^2,$$

e sostituendo b^2+c^2 ad a^2 nelle altre due equazioni, si trova:

$$b^2=b^2+2c^2-2ac\cos B,$$

$$c^2=c^2+2b^2-2ab\cos C;$$

ossia $c-a\cos B=0$; ovvero $c=a\cos B$;

$b-a\cos C=0$; » $b=a\cos C$.

Si ricade dunque sul primo e sul secondo teorema del § 81; ma se l'angolo A è retto, gli angoli B e C sono complementi l'uno dell'altro, onde $\cos B=\operatorname{sen} C$, e $\cos C=\operatorname{sen} B$. Dunque $\cos C=\frac{b}{a}$ si può cambiare in $\operatorname{sen} B=\frac{b}{a}$; ciò che non è altro se non che il terzo teorema dei triangoli rettangoli. Mediante il secondo ed il terzo di tali teoremi potendosi, come si è allo stesso paragrafo dimostrato, dedurre

il quarto; ne segue che i quattro teoremi dei triangoli rettangoli sono implicitamente compresi nelle equazioni (M).

Finalmente dalla formola generale

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A,$$

si deduce:

$$\cos A = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc};$$

ed elevando al quadrato:

$$\cos^2 A = \frac{b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{4b^2c^2}.$$

sostituendo quest'espressione di $\cos^2 A$ nell'equazione

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \cos^2 A,$$

si troverà:

$$\operatorname{sen}^2 A = 1 - \frac{b^4 + c^4 + a^4 + 2b^2c^2 - 2a^2b^2 - 2a^2c^2}{4b^2c^2};$$

riducendo il secondo membro ad una sola espressione frazionaria, cambiando i segni a tutti i termini del numeratore della frazione che si diffalca da 1, si avrà

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{4b^2c^2 - 2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2},$$

e finalmente

$$\operatorname{sen}^2 A = \frac{2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4}{4b^2c^2};$$

estraendo la radice quadrata, e moltiplicando quindi numeratore e denominatore per a, si ottiene:

$$\operatorname{sen} A = a \times \frac{\sqrt{(2b^2c^2 + 2a^2c^2 + 2a^2b^2 - a^4 - b^4 - c^4)}}{2abc}.$$

Ora essendo la frazione che moltiplica a simmetrica rispetto ai tre lati, epperciò non variando col sostituire ad uno un altro lato, si chiami questa frazione M, si avrà

$$sen\ A = a \times M\ ;$$

e sarà lecito conchiudere

$$sen\ B = b \times M\ , \qquad sen\ C = c \times M\ ;$$

dunque $\dfrac{sen\ A}{sen\ B} = \dfrac{a}{b}\ , \qquad \dfrac{sen\ A}{sen\ C} = \dfrac{a}{c}\ ;$

ossia $sen\ A : sen\ B : sen\ C :: a : b : c\ .$

Dunque in ogni triangolo rettilineo i seni degli angoli sono proporzionali ai lati opposti; come si è precedentemente in altro modo dimostrato.



LEZIONE SETTIMA.

RISOLUZIONE DEI TRIANGOLI OBBLIQUANGOLI.

(letta il 14 marzo 1834.)

SIGNORI,

Determinati nella precedente lezione i due teoremi dai quali dipende la risoluzione dei triangoli obbliquangoli, considereremo in questa i quattro casi già da noi risolti graficamente nella lezione terza di queste nozioni trigonometriche (§ 67).

84. **Risoluzione dei triangoli obbliquangoli.** — I. CASO. *Dato un lato* a *e due angoli* A *e* B, *trovare* C, b *e* c.

V'ha in primo luogo

$$C = 180° - (A + B).$$

Quindi le proporzioni:

$$sen\ A : sen\ B :: a : b ;$$

$$sen\ A : sen\ C :: a : c ,$$

danno:

$$\log b = \log a + \log sen\ B - \log sen\ A ,$$

$$\log c = \log a + \log sen\ C - \log sen\ A .$$

II. Caso. *Dati due lati* a *e* b, *e l'angolo* A *opposto al lato* a, *trovare* B, C *e* c.

Si ottiene l'angolo B mediante la proporzione:

$$a : b :: sen\, A : sen\, B\ ,$$

che dà:

$$\log sen\, B = \log sen\, A + \log b - \log a\ .$$

Conoscendo i due angoli A e B si deduce il terzo,

$$C = 180° - (A + B)\ ;$$

infine si determina c colla proporzione:

$$sen\, A : sen\, C :: a : c\ ;$$

donde si ricava:

$$\log c = \log a + \log sen\, C - \log sen\, A\ .$$

Si è a suo luogo riconosciuto che la soluzione grafica di questo problema presenta d'ordinario due risultati, ABC ed $AB'C$ (fig. 17): ciò succede pur anche nella risoluzione trigonometrica, poichè l'angolo B essendo determinato mediante il suo seno, e gli angoli supplementari ABC, $AB'C$, avendo seni eguali, non si sa se debbasi prendere pel valore di B, quello dell'angolo acuto dato dalle tavole, oppure quello del suo supplemento $180° - B$.

L'indeterminazione cessa allorchè si sa *a priori* di quale specie deve essere l'angolo che si cerca.

In due circostanze però non v'ha che una soluzione:

1.° Quando l'angolo A essendo acuto, vi è $a > b$ (fig. 18); perchè in allora al lato maggiore dovendo essere opposto il più grande angolo, è chiaro che $A > B$, e che perciò B non può essere che acuto:

2.° Quando l'angolo A è ottuso; perchè in questo caso B dev'essere acuto.

V'ha poi una soluzione sola, quando l'arco descritto dal vertice C come centro, con raggio $=a$, non fa che toccare la retta AB (fig. 17) senza intersecarla; poichè allora, come si è osservato al § 67, si avrà un solo triangolo rettangolo ACD. Da ciò risulta che $CB=a$, diventa CD.

Ma il triangolo rettangolo ACD dà

$$a=CD=b \; sen \; A \; ,$$

e trasportando questa relazione in quella

$$sen \; B=\frac{b}{a} \; sen \; A \; ,$$

si troverà:
$$sen \; B=\frac{b \; sen \; A}{b \; sen \; A}=1 \; .$$

Ora i logaritmi delle tavole essendo, per le linee trigonometriche, uguali ai logaritmi di queste linee, considerate in un circolo di raggio *uno*, aumentati di 10 (§ 80); ne segue che il logaritmo di *uno* essendo zero, le tavole daranno

$$log \; sen \; B=0+10=10 \; :$$

si perviene adunque a quest'ultimo risultato ogniqualvolta a è uguale alla perpendicolare abbassata da C sopra AX.

Potrebbe finalmente accadere che si avesse fra i dati la seguente relazione:

$$a<b \; sen \; A \; , \quad \text{donde} \; \frac{b \; sen \; A}{a}>1 \; .$$

Ma $sen \; B=\dfrac{b \; sen \; A}{a}$; si avrebbe perciò:

$$sen \; B>1 \; , \quad \text{e} \; log \; sen \; B>10 \; ,$$

ciò che è assurdo, poichè il seno di un arco non può essere maggiore del raggio.

Questo risultato indica che l'arco descritto da C come centro, col raggio a, non tocca AX.

III. Caso. *Dati due lati* a, b, *e l'angolo compreso* C, *trovare* A, B *e* c.

La proporzione

$$\operatorname{sen} A : \operatorname{sen} B :: a : b,$$

non può immediatamente servire alla risoluzione del caso presente, come facilmente si può riconoscere; ma essa può trasformarsi nella seguente:

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B :: a + b : a - b.$$

Ora la prima delle formole (L) dà

$$\operatorname{sen} A + \operatorname{sen} B : \operatorname{sen} A - \operatorname{sen} B :: \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B):$$

avremo adunque:

$$a + b : a - b :: \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B).$$

Il terzo termine di questa proporzione è conosciuto, perchè $A + B = 180° - C$,

donde $\frac{1}{2}(A + B) = 90° - \frac{1}{2} C$;

epperciò $\operatorname{tang} \frac{1}{2}(A + B) = \cot \frac{1}{2} C$. (§ 72)

L'ultima proporzione si può adunque scrivere nel seguente modo:

$$a + b : a - b :: \cot \frac{1}{2} C : \operatorname{tang} \frac{1}{2}(A - B);$$

dalla quale si deduce:

$$\tang \frac{1}{2}(A-B)=\frac{a-b}{a+b}\cot \frac{1}{2}C ,$$

ed impiegando i logaritmi:

$$\log \tang \frac{1}{2}(A-B)=\log (a-b)+\log \cot \frac{1}{2}C-\log (a+b) .$$

Quando si sarà ottenuto il valore di $\frac{1}{2}(A-B)$, combinandolo per addizione e sottrazione con quello già conosciuto di $\frac{1}{2}(A+B)$, si troveranno facilmente i valori di A e di B: sia, per esempio,

$$\frac{1}{2}(A+B)=m^{\circ} , \quad \text{ed} \quad \frac{1}{2}(A-B)=n^{\circ} ;$$

per addizione si avrà $A=m^{\circ}+n^{\circ}$,

e per sottrazione.... $B=m^{\circ}-n^{\circ}$.

Trovati gli angoli A e B, si otterrà c colla formola

$$c=\frac{a \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} A} , \quad \text{oppure} \quad c=\frac{b \operatorname{sen} C}{\operatorname{sen} B} ;$$

ed impiegando i logaritmi:

$$\log c=\log a+\log \operatorname{sen} C-\log \operatorname{sen} A ,$$

o $$\log c=\log b+\log \operatorname{sen} C-\log \operatorname{sen} B .$$

Si noti che l'angolo incognito $\frac{1}{2}(A-B)$ essendo, in questo 3.° caso, dato da una tangente, e potendo una tan-

gente passare per tutte le grandezze immaginabili (§ 72), qualunque ipotesi si faccia sui dati, non si perverrà mai ad un risultato assurdo; ed infatti si è a suo luogo riconosciuto potersi sempre costrurre un triangolo, essendo dati due lati e l'angolo compreso.

IV. Caso. *Dati i tre lati* a, b *e* c, *determinare i tre angoli* A, B *e* C.

Le tre formole (M) danno

$$\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}, \quad \cos B=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac},$$

$$\cos C=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}:$$

per rendere queste formole calcolabili mediante i logaritmi, basterà considerarne una, per esempio, la prima.

Se si aggiugne l'unità ai due membri della prima equazione, ne verrà:

$$1+\cos A=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}+1=\frac{b^2+c^2+2bc-a^2}{2bc};$$

ma $\qquad b^2+c^2+2bc=(b+c)^2:$

dunque $\qquad 1+\cos A=\frac{(b+c)^2-a^2}{2bc};$

scomponendo il numeratore di questa frazione in fattori, si avrà

$$(b+c)^2-a^2=(b+c+a)(b+c-a);$$

perciò: $\qquad 1+\cos A=\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{2bc}.$

Ora dalle equazioni (D), si ha:

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1+\cos A}{2}}\ ,$$

e sostituendo ad $1+\cos A$ il secondo membro della precedente equazione, si avrà finalmente:

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(a+b+c)(b+c-a)}{4bc}}\ ,$$

formola calcolabile coi logaritmi.

Se in quest'ultima equazione, colla quale si ottiene il coseno della metà dell'angolo A, si fa per maggior semplicità

$$a+b+c=2p\ ,$$

donde $b+c-a=a+b+c-a-a=2p-2a$,
si avrà:

$$\cos\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{2p\,.\,2(p-a)}{4bc}}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ .$$

Si troverebbe in egual modo:

$$\cos\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ;$$

$$\cos\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}}\ ;$$

ed applicando i logaritmi

$$\log\cos\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-a)+\text{compl.}\log b+\text{compl.}\log c]\ ,$$

$$\log\cos\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-b)+\text{compl.}\log a+\text{compl.}\log c]\ ,$$

$$\log\cos\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}[\log p+\log(p-c)+\text{compl.}\log a+\text{compl.}\log b]\ .$$

Per verificazione dei calcoli si può impiegare la relazione $A+B+C=180°$.

Gli angoli A, B e C si possono anche determinare col mezzo dei seni e delle tangenti delle loro metà.

La seconda delle precitate formole (D), dà

$$sen\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{1-\cos A}{2}}\ ;$$

sostituendo a $\cos A$ il suo valore dato dalla prima delle formole (M), si otterrà

$$sen\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{2bc-(b^2+c^2-a^2)}{4bc}}=\sqrt{\frac{a^2-(b-c)^2}{4bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(a+b-c)(a+c-b)}{4bc}}\ ;$$

ma
$$a+b-c=2p-2c\ ,$$
$$a+c-b=2p-2b\ ;$$

dunque finalmente

$$sen\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ .$$

Si troverebbe pure

$$sen\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,$$

$$sen\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}}\ .$$

Finalmente riflettendo che $tang\frac{1}{2}A=\dfrac{sen\frac{1}{2}A}{\cos\frac{1}{2}A}$,

si troverà

$$tang\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}:\frac{p(p-a)}{bc}}$$

$$=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{bc}\times\frac{bc}{p(p-a)}}\,,$$

cioè: $$tang\,\frac{1}{2}A=\sqrt{\frac{(p-b)\,(p-c)}{p(p-a)}}\,;$$

si ha parimenti

$$tang\,\frac{1}{2}B=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-c)}{p(p-b)}}\,,$$

$$tang\,\frac{1}{2}C=\sqrt{\frac{(p-a)\,(p-b)}{p(p-c)}}\,.$$

Queste ultime formole hanno sulle precedenti il vantaggio di richiedere la ricerca di *quattro* soli logaritmi, vale a dire $log\,p$, $log(p-a)$, $log(p-b)$, e $log(p-c)$, mentre colle precedenti se ne devono cercare *sei*, e colle prime *sette*.

85. **Calcolo delle aree de' triangoli.** — Termineremo questa lezione colla ricerca dell'area d'un triangolo del quale si conoscano due lati e l'angolo compreso, od un lato e gli angoli adiacenti.

1.° Si trova l'area d'un triangolo quando si conoscano *due lati e l'angolo fra essi compreso*, nel modo seguente: sia S l'area del triangolo ABC (fig. 19), c la sua base AB, b l'altro lato dato CA, ed h la sua altezza CD; si avrà

$$S=\frac{c\times h}{2}\,;$$

ma $h=b\,sen\,A$; dunque $S=\frac{1}{2}b\,c\,sen\,A$,

L'area chiesta è adunque eguale *al semiprodotto dei due lati dati pel seno dell'angolo compreso.*

2.° Si suppongano ora conosciuti i due angoli A e B, ed il lato c: v'ha

$$b=\frac{c \, sen \, B}{sen \, C};$$

ma essendo $C=180^\circ-(A+B)$, sarà

$$sen \, C = sen \, (A+B):$$

dunque $$b=\frac{c \, sen \, B}{sen \, (A+B)},$$

e portando questo valore di b nell'espressione dell'area trovata precedentemente, si otterrà

$$S=\frac{c^2 \, sen \, A \, sen \, B}{2 \, sen \, (A+B)}.$$

Al § 45, trattando delle aree dei terreni rilevati coi goniometri, abbjamo osservato che se non si ottengono immediatamente con questi stromenti i dati necessari al calcolo delle superficie, si ha però quanto si richiede per ottenere quelli che mancano. Ciò si rende ora manifesto; poichè, sia che un piano si rilevi per irradiamento, sia che si rilevi per intersecazione o per camminamento, sia finalmente che s'impieghino nel rilevamento i tre metodi simultaneamente, è evidente che il piano rilevato verrà scomposto in triangoli, dei quali si conosceranno o due lati e l'angolo compreso, od un lato e due angoli adiacenti, e che perciò sarà sempre possibile trovare le aree di ciascun angolo mediante l'una o l'altra delle due formole precedenti.



LEZIONE OTTAVA.

RISOLUZIONE DE' TRIANGOLI. - APPLICAZIONI NUMERICHE.

(letta il 17 marzo 1851.)

Signori,

I metodi esposti nella precedente lezione per la risoluzione di tutti i casi, tanto de' triangoli rettangoli quanto di quelli obbliquangoli, sono i più semplici che si possano impiegare; e per meglio dimostrare la facilità con cui si perviene mediante i medesimi a determinare le incognite, ed anche per esercizio nell'uso delle tavole trigonometriche, faremo nella presente lezione delle applicazioni numeriche per ciascuno de' casi già da noi risolti in modo generale.

Osserveremo intanto che nelle operazioni planimetriche, come si vedrà in seguito, non tutti i casi da noi considerati hanno un'eguale importanza; che anzi alcuni di essi non vengono, si può dire, mai adoperati. I casi che più di frequente occorrono, sono il primo dei triangoli rettangoli, il primo ed il terzo degli obbliquangoli.

86. **Esempi numerici sui triangoli rettangoli.** — I. Caso. *Dati* $a = 1264^m,80$, $B = 48°\,24'\,40''$; *trovare* C, b *e* c.

$$C = 90° - 48°\,24'\,40'' = 41°\,35'\,20''.$$

Calcolo di b.

$$\log b = \log a + \log \operatorname{sen} B - 10\ ;$$

$$\log a = \log 1264,80 \quad = 3,1020219$$

$$\log \operatorname{sen} B = l.s.\, 48^\circ\, 24'\, 40'' = 9,8738591$$

$$\log b = \ldots\ldots\ldots\ldots \quad 2,9758810 = \log 945^m,978$$

$$2,9758774 = \log 945,\ 97$$

Diff. tav. 46 *Diff.* 36

$$46 : 1 :: 36 : x = 0,79\ .$$

Calcolo di c.

$$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C - 10\ .$$

$$\log a = \ldots\ldots \quad 3,1020219$$

$$\log \operatorname{sen} C = \log \cos B = 9,8220249\ .$$

$$\log c = \ldots\ldots \quad 2,9240468 = \log 839^m,55\ .$$

Il logaritmo di 1264, 80 si trova immediatamente nelle tavole di *Callet*, come anche il logaritmo del seno e quello del coseno di *B*. Disposto il calcolo come qui sopra, nel fare la somma, invece di scrivere 12, si lascia il 10 e si scrive soltanto 2; e ciò perchè, come si è più volte osservato, le tavole non contengono i logaritmi delle linee trigonometriche considerate in un circolo di raggio *uno*, ma bensì questi logaritmi accresciuti di 10.

In tutti i casi analoghi a quello qui considerato si può tralasciare la proporzione, e prendere per lunghezza di *b* 945^m, 98; ciò che è sufficientemente esatto.

II. Caso. *Dati* $b=2320^m,78$, $B=38°22'15''$; *trovare* C, a *e* c.

$$C=180°-38°22'15''=51°37'45''.$$

Calcolo di a.

$\log a=\log b+\text{compl.}\log \text{sen}\, B.$

$\log b=\log 2320,78 \quad =3,3656340$

$\text{compl.}\log \text{sen}\, 38°22'15''=0,2070841$

$\log a \ldots\ldots\ldots\ldots =3,5727181=\log 3738,68$

$3,5727090=\log 3738,6$

Diff. tav. 116 *Diff.* 91

Calcolo di c.

$\log c=\log b+\text{compl.}\log \text{tang}\, B.$

$\log b \ldots\ldots\ldots =3,3656340$

$\text{compl.}\log \text{tang}\, B=0,1014055$

$\log c \ldots\ldots\ldots =3,4670395=\log 2931,16.$

$3,4670306=\log 2931,1.$

Diff. tav. 149. *Diff.* 89.

In questo esempio, il logaritmo di *sen* 38° 22′ 15″ non si trova nelle tavole, ma vi è quello di *sen* 38° 22′ 10″, la differenza fra il logaritmo di questo seno e quello di *sen* 38° 22′ 20″ è 266; aggiugnendo a 9,7929026, che

è il logaritmo di *sen* $38°\,22'\,10''$, la metà di 266, che è 133, si trova essere *log sen* $38°\,22'\,15''=9,7929159$, il cui complemento è 0, 2070841.

Osservando poscia che dalle due formole

$$tang\ a=\frac{sen\ a}{cos\ a}\,,\qquad cot\ a=\frac{cos\ a}{sen\ a}\,,$$

si deduce $$tang\ a=\frac{1}{cot\ a}\,;$$

ossia $$tang\ a\ cot\ a=1\,:$$

donde risulta, prendendo i logaritmi di *tang a* e di *cot a* nelle tavole:

$$log\ tang\ a+log\ cot\ a=20\,;$$

se ne conchiude:

$$log\ cot\ a-10=10-log\ tang\ a=compl.\ log\ tang\ a\,;$$

vale a dire, che il complemento del logaritmo tavolare della tangente di un arco, è uguale al logaritmo tavolare della cotangente dello stesso arco diminuito di 10. Se si cerca pertanto questo logaritmo nelle tavole, si trova essere desso compreso fra 10, 1014271, e 10, 1013839: ora la differenza fra due logaritmi consecutivi delle cotangenti di questa parte delle tavole essendo 432, e quella fra gli angoli essendo di $10''$; togliendo da 0, 1014271, oppure aggiugnendo a 0, 1013839 la metà di 432, si avrà 0, 1014055 per *log cot* $38°\,22'\,15''-10=$ *compl. log tang* $38°\,22'\,15''$.

III. Caso. *Dati* $a=875^{m},25$ *e* $b=539^{m},68$; *trovare* B, C *e* c.

Calcolo di B.

$$\log sen\, B = \log b + compl.\ \log a\ .$$

$$\log b = \log 539,68 = 2,7321363$$

$$compl.\ \log a = c.l.\,875,25 = 7,0578679$$

$$\log sen\, B = \ldots\ldots = 9,7900042 = \log sen\, 38^\circ\, 4'\, 6''$$

$$9,7899880 = \log sen\, 38^\circ\, 4'\, 0''$$

Diff. tav. 269 *Diff.* 162

$$269 : 10'' :: 162 : x = \frac{1620''}{269} = 6''.$$

Dunque $B = 38^\circ\ 4'\ 6''$,
e $C = 90^\circ - B = 51.\ 55.\ 54.$ } $90^\circ\, 0'\, 0''$.

Calcolo di c.

$$\log c = \log a + \log \cos B - 10\ .$$

$$\log a = \log 875,25 = 2,9421321$$

$$\log \cos B = l.\cos 38^\circ\, 4'\, 6'' = 9,8961270$$

$$\log c \ldots\ldots\ldots = 2,8382591 = \log 689^m,063$$

$$2,8382570 = \log 689,06$$

Diff. tav. 63. *Diff.* 21.

Verificazione.

$$log\ c = \frac{1}{2}[log\,(a+b) + log\,(a-b)]\ .$$

$$a+b = 1414^m,93\ ; \qquad a-b = 335^m,57\ .$$

$$log\ 1414,93 = 3,1507349$$

$$log\ 335,57 = 2,5257831$$

$$5,6765180$$

$$log\ c = 2,8382590 = log\ 689^m,063\ .$$

Per ottenere l'angolo corrispondente al seno che ha il logaritmo trovato nel calcolo di B, si cerca questo logaritmo nelle tavole, e si trova ch'esso è compreso fra 9,7899880 che corrisponde a *sen* 38° 4′ 0″, ed un altro più grande corrispondente a *sen* 38° 4′ 10″: supponendo adunque che le differenze fra i logaritmi dei seni sieno proporzionali alle differenze fra gli angoli, si stabilisce la seguente proporzione: *la differenza tavolare* : 10″ : : *la differenza fra il logaritmo dedotto e quello delle tavole immediatamente inferiore a questo* : x. Con questa proporzione si è trovato che l'angolo il cui seno ha per logaritmo 9,7899880 va aumentato di 6″; laonde si ha finalmente $B = 38°\,4'6''$.

Nel calcolo del lato c, si deve cercare il logaritmo del coseno di 38° 4′6″, e non essendovi questo logaritmo nelle tavole, si cerca fra quali logaritmi sia compreso; trovando che esso sarebbe compreso fra i logaritmi di *cos* 38° 4′ 0″ e di *cos* 38° 4′ 10″, e non dimenticando che i coseni diminuiscono coll'aumentare degli angoli, si stabilisce la proporzione:

$10'' : 165$ *Diff. tav.* $:: 6'' : x = 165 \times 0,6 = 99$:

dunque $\cos 38° 4' 6'' = 9,8961369 - 99$

$= 9,8961270$.

IV. Caso. *Dati* $b = 425^m, 50$ *e* $c = 499^m, 80$; *trovare* B, C *ed* a.

Calcolo di B.

$$\log \tan B = \log b + \text{compl.} \log c .$$

$\log . b = \log 425,50 = 2,6288996$

$\text{compl.} \log c = c.l. 499,80 = 7,3012037$

$\log \tan B \ldots\ldots = 9,9301033$

$9,9300916 = l.t. 40° 24' 30''$.

Diff. tav. 426. *Diff.* 117.

$$426 : 10'' :: 117 : x = \frac{1170}{426} = 2'' .$$

Dunque $B = 40° 24' 32''$

donde $C = 49.\ 35.\ 28$.

$B + C = 90°\ 0'\ 0''$.

Calcolo di a.

$$\log a = \log b + \text{compl.} \log \text{sen} B .$$

$\log b \ldots\ldots = 2,6288996$

$\text{compl.} \log \text{sen} 40° 24' 32'' = 0,1882656$

$\log a \ldots\ldots = 2,8171651 = \log 656^m, 39$.

87. **Esempi numerici sui triangoli obbliquangoli.** — I. Caso. *Dati* a $=681^m,625$, $A=77°3'19''$, *e* $B=55°16'41''$; *trovare* b, c *e* C.

$$C=180°-(A+B)=47°40'0''\ .$$

Calcolo di b.

$$\log b=\log a+\log \operatorname{sen} B+\text{compl.}\log\operatorname{sen} A-10\ .$$

$$\log a=\log 681^m,625=2,8335455$$

$$\log\operatorname{sen} B=l.s.55°16'41''=9,9148326$$

$$c.\log\operatorname{sen} A=c.l.s.77.3.19=0,0111796$$

$$\log b \ldots\ldots\ldots\ldots=2,7595577=\log 574,854.$$

Calcolo di c.

$$\log c=\log a+\log\operatorname{sen} C+\text{compl.}\log\operatorname{sen} A-10\ .$$

$$\log a=\ldots\ldots 2,8335455$$

$$\log\operatorname{sen} C=\ldots\ldots 9,8687851$$

$$\text{compl.}\log\operatorname{sen} A=\ldots\ldots 0,0111796$$

$$\log c=\ldots\ldots 2,7135102=\log 517^m,025\ .$$

Questo è il caso il più semplice ed il più frequente della geodesia.

II. Caso. *Dati* a $=577^m,70$, b $=715^m,77$, *e l'angolo* $A=40°56'0''$; *trovare* c, B *e* C.

Calcolo di B.

$\log \operatorname{sen} B = \log \operatorname{sen} A + \log b + \text{compl.} \log a - 10$.

$\log \operatorname{sen} A = l.s. 40°56'0'' = 9,8163609$

$\log b = \log 715^m, 77 = 2,8547735$

$c. \log a = c.l. 577^m, 70 = 7,2382976$

$\log \operatorname{sen} B \ldots\ldots\ldots\ldots = 9,9094320 = \log \operatorname{sen} 54°16'8''$

$9,9094190 = \log \operatorname{sen} 54°16'$.

Diff. tav. 152. *Diff.* 130.

Dunque $B = 54°16'8''$

$A = 40°.56'.0$

$A + B = 95°12'8''$

$C = 84.47.52$

$A + B + C = 180°.0'\ 0''$.

Calcolo di c.

$\log c = \log a + \log \operatorname{sen} C + \text{compl.} \log \operatorname{sen} A - 10$.

$\log a = 2,7617024$

$\log \operatorname{sen} C = 9,9982073$

$\text{compl.} \log \operatorname{sen} A = 0,1836391$

$\log c = 2,9435488 = \log 878^m, 11$.

Se invece di assumere per B il valore $54°16'18''$, si assumesse il supplemento di questo, $180°-54°16'8''=125°43'52''$; ne risulterebbe $A+B=166°39'52''$, $C=13°20'8''$; e si troverebbe quindi per c:

$$\log a=2,7617024$$
$$\log \operatorname{sen} C=9,3629602$$
$$\text{compl.} \log \operatorname{sen} A=0,1836391$$
$$\log c=2,3083017=\log 203^m,37.$$

Si avrebbero adunque due triangoli, come si era osservato (§ 84) trattando della risoluzione generale di questo caso, ed i valori di B, uno supplementare dell'altro, sono ambedue più grandi di A, ciò che deve essere, perchè $b>a$.

Coi seguenti dati: $a=87^m,81$; $b=71^m,57$; $A=84°7'50''$; non è ammessibile il supplemento di B, poichè essendo $b<a$, e l'angolo $A<90°$, deve essere B acuto e minore di A. In tal caso si avrebbe adunque una soluzione sola.

Se i dati fossero $a=120^m,00$; $b=200^m,00$; ed $A=112°$; il triangolo sarebbe impossibile, perchè con $b>a$, si deve avere $B>A$: ma $A>90°$; dunque il triangolo non può sussistere.

III. Caso. *Dati* $b=537^m,292$; $a=596^m,754$; $C=72°40'0''$; *trovare* c, A e B.

Operazioni preliminari.

$a+b=1134^m,046 \qquad \frac{1}{2}C=36°20'0''$

$a-b=\ \ 59,462 \qquad \frac{A+B}{2}=90°-\frac{1}{2}C=53°40'0''.$

Calcolo di A e di B.

$$\log \tan g \frac{1}{2}(A-B) = \log(a-b) + \log \cot \frac{1}{2} C + com. \log(a+b) - 10.$$

$$\log(a-b) = 1,7742395$$
$$\log \cot \frac{1}{2} C = 10,1334356$$
$$compl. \log(a+b) = 6,9453869$$
$$\log \tan g \frac{1}{2}(A-B) = 8,8530620 = \log \tan g\, 4^\circ 4' 40''.$$

$$\frac{A+B}{2} = 53^\circ 40' 0'', \qquad A = 57^\circ 44' 40'',$$
$$\frac{A-B}{2} = 4.\ 4.\ 40.; \qquad B = 49.\ 35.\ 20.$$

Calcolo di c.

$$\log c = \log a + \log sen\, C + compl. \log sen\, A - 10.$$

$$\log a = 2,7757952$$
$$\log sen\, C = 9,9798158$$
$$compl. \log sen\, A = 0,0727960$$
$$\log c = 2,8284070 = \log 673,607.$$

IV. ED ULTIMO CASO. *Dati* $a=695^m,37$; $b=574^m,86$ *e* $c=487^m,95$; *trovare i tre angoli* A, B *e* C.

Operazioni preliminari.

$a+b+c=1758^m,18$; donde $p=879^m,09$.

$p=879,09$	$p=879,09$	$p=879,09$
$a=695,37$	$b=574,86$	$c=487,95$
$p-a=183,72.$	$p-b=304,23.$	$p-c=391,14.$

Calcolo di A.

$$\log\tan g\frac{1}{2}A=\frac{1}{2}[l.(p-b)+l.(p-c)+compl.l.p+compl.l.(p-a)].$$

$$\begin{aligned}
\log(p-b)&=2,4832020\\
\log(p-c)&=2,5923322\\
compl.\log p&=7,0559667\\
compl.\log(p-a)&=7,7358436\\
&\overline{19,8673445}
\end{aligned}$$

$$\log\tan g\frac{1}{2}A=9,9336722=\log\tan g\,40^\circ 38'30''$$

$$A=81^\circ 17' 0''.$$

Calcolo di B.

$$\log\tan\frac{1}{2}B=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-c)+compl.l.p+compl.l.(p-b)].$$

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 2,2641564\\
\log(p-c) &= 2,5923322\\
compl.\ \log p &= 7,0559667\\
compl.\ \log(p-b) &= 7,5167980\\
\hline
& \ 19,4292533
\end{aligned}$$

$$\log\tan\frac{1}{2}B=9,7146266=\log\tan 27^\circ 24' 0'',5$$

$$B=54^\circ 48' 1''.$$

Calcolo di C.

$$\log\tan\frac{1}{2}C=\frac{1}{2}[l.(p-a)+l.(p-b)+compl.l.p+compl.l.(p-c)].$$

$$\begin{aligned}
\log(p-a) &= 2,2641564\\
\log(p-b) &= 2,4832020\\
compl.\ \log p &= 7,0559667\\
compl.\ \log(p-c) &= 7,4076678\\
\hline
& \ 19,2109929=\log\tan 21^\circ 57' 29'',4
\end{aligned}$$

$$C=43^\circ 54' 59''.$$

Verificazione.

$A = 81° \ 17' \ 0''$

$B = 54.48. \ 1$

$C = 43.54.59$

$180° \ 0' \ 0''$.



LEZIONE NONA.

COORDINAMENTO DI UN PUNTO AD UNA BASE, DI PIÙ PUNTI FRA DI LORO E DI PIÙ PUNTI A PIÙ BASI.

(letta il 21 marzo 1854.)

Signori,

Le questioni planimetriche già da noi trattate graficamente, sia mediante la tavoletta pretoriana, sia col misurare gli angoli con un goniometro e portandoli poscia sul piano col mezzo del rapportatore grafico, possiamo ora trattarle numericamente.

Il calcolo però, dovendo condurre a risultati esatti, deve appoggiarsi a dati rilevati con tutta la precisione possibile; senza di ciò, i piccoli errori commessi nella misura delle basi ed in quella degli angoli verrebbero meglio posti in evidenza dalla verità del calcolo, che non da una costruzione grafica, e a nulla servirebbe l'illimitata esattezza da una parte, quando non si fosse certi di poter ottenere dall'altra una sufficiente approssimazione.

Gli angoli e le basi si devono adunque misurare colla massima accuratezza, se alla risoluzione delle questioni planimetriche vuolsi applicare il calcolo trigonometrico. Si ri-

getteranno pertanto in questo caso tutti quegli stromenti coi quali non è possibile ottenere grande precisione, come per esempio, la bussola, il grafometro a semicircolo e simili, e si impiegheranno solo stromenti che si possano esattamente rettificare, e coi quali sia possibile ripetere ciascun angolo un numero di volte bastevole a dare la voluta approssimazione, come sarebbe il teodolite ripetitore (§ 36).

88. **Coordinamento d'un punto ad una base.** — *Coordinare un punto ad una base* è lo stesso che *determinare la posizione di un punto relativamente a due altri la cui posizione già si suppone stabilita.*

Siano A e B (fig. 19) le estremità della base AB, C il punto da coordinarsi a questa base. La posizione del punto C, relativamente ai due altri A e B, non si può altrimenti fissare, che mediante la conoscenza di tre degli elementi che costituiscono il triangolo ABC, il quale ha due de' suoi vertici negli estremi della base data, ed il terzo nel punto da determinarsi. Ma d'ipotesi la base AB è data; mancano adunque due altri elementi.

La trigonometria insegna potersi scegliere per questi elementi:

1.° Oltre la base, *due angoli:*

2.° *Un altro lato e l'angolo opposto a questo od alla base:*

3.° *Un altro lato e l'angolo compreso fra questo e la base:*

4.° Finalmente *gli altri due lati.*

Ora la difficoltà di misurare esattamente le linee di ragguardevole lunghezza sul terreno, ed il tempo che vi si deve impiegare, fanno sì che nelle operazioni di questa natura si preferisca sempre misurare una sola base e gli angoli; ciò che riduce la questione al primo caso dei triangoli obbliquangoli.

Conosciuta la base AB e misurati due angoli, si calcoleranno i lati AC e CB col mezzo delle note proporzioni:

$$sen\,C : sen\,A :: AB : BC\,,$$

$$sen\,C : sen\,B :: AB : AC\,.$$

Dopo ciò, si conosceranno le distanze del punto C dagli estremi A e B della base, e conoscendosi di più da qual parte della base si trovi il punto C, e quali estremi di essa occupino i punti A e B, il punto C sarà determinato di posizione rispetto alla base AB.

Determinata la distanza AC colla seconda delle precedenti proporzioni, si potrebbero ottenere le lunghezze della perpendicolare CD abbassata dal punto C sulla base, e del segmento di questa AD, colle formole del primo caso de' triangoli rettangoli:

$$CD = AC\,sen\,A\,, \qquad AD = AC\cos A\,.$$

Supponendo adunque i punti A e B già collocati su di un piano, vi si potrà collocare anche il punto C, descrivendo dai punti A e B come centri e con raggi rispettivamente uguali ad AC e BC, due archi che intersecandosi determinano la posizione di C, o meglio portando su AB la lunghezza AD, e in D innalzando una perpendicolare alla base uguale a CD. Si evita in tal modo la costruzione grafica degli angoli e si riconduce il problema alla costruzione di un triangolo del quale si conoscono i tre lati, o a quella di un triangolo rettangolo mediante i due cateti.

89. **Coordinamento di più punti fra di loro.** — Dovendosi fissare la posizione di vari punti del terreno su di un piano, i quali punti debbano poi servire di capisaldi per gli ulteriori rilevamenti parziali, devonsi supporre fra loro collegati

mediante linee rette che coprano il terreno formando una rete di triangoli, in modo che ognuno di essi sia il vertice di almeno due triangoli i quali abbiano un lato comune. Scelto poscia uno de' lati di questi triangoli per base, o meglio, scelta una base in un sito conveniente, si misura questa accuratamente, come diremo nella prossima lezione, e partendo dagli estremi della base, si misurano tutti gli angoli che essa fa colle visuali dirette a due o più punti scelti fra quelli da determinarsi; e si misurano poscia successivamente tutti gli angoli dei triangoli.

Accade frequentemente che da uno dei punti da determinarsi con una triangolazione, si possano scoprire tre altri punti posti ai vertici di uno stesso triangolo, ma che da questi, o sia malagevole od impossibile lo scoprire il primo: oppure che dopo di aver eseguita una triangolazione si renda necessaria al miglior andamento delle operazioni susseguenti, la determinazione di altri punti che diremo secondari. Nel primo caso è indispensabile, nel secondo è alle volte più comodo di risolvere la seguente questione: *Determinare un punto mediante tre altri noti di posizione.*

I punti da determinarsi alcune volte non sono accessibili, ciò che obbliga a stabilire la stazione per le osservazioni in un sito fuori del vertice comune degli angoli che in uno di tali punti si dovrebbero misurare; ed allora si rende necessaria la correzione detta *riduzione degli angoli al centro di stazione.*

Se nella misura degli angoli si impiegassero stromenti che non dessero gli angoli già ridotti all'orizzonte, gli angoli osservati dovrebbero subire la correzione che vien chiamata *riduzione dell'angolo all'orizzonte.*

Se nel misurare un angolo si dovesse dirigere il cannoc-

chiale ad una torre che fosse in parte illuminata dal sole, sarebbe difficile prendere la mira precisamente sul suo asse, e ciò richiederebbe una nuova correzione dipendente dalla forma dell'oggetto osservato, detta *correzione della fase.* Di questa correzione noi non ci occuperemo, perchè in tutte le operazioni supporremo che si metta per segnale di mira, sul terreno e sugli edifici, un'asta sottile od una palina.

Allorchè tutti gli angoli misurati in una stazione, e che costituiscono un giro d'orizzonte, avranno subite le necessarie correzioni, la loro somma dovrà essere di 360°, e la somma dei tre angoli d'ogni triangolo deve essere di 180°; è però difficile che si ottenga tanta esattezza, ed in generale, se la differenza non è troppo grande, si ripartisce proporzionalmente sulla misura di ciascun angolo: se l'errore però eccedesse i limiti della tolleranza prestabilita, bisognerebbe rifare le osservazioni e le correzioni. Ridotti i tre angoli di ogni triangolo ad essere tali che la loro somma sia uguale a due angoli retti, si procede al calcolo definitivo dei lati.

Quando si saranno calcolati tutti i lati si potrà eseguire il piano trigonometrico, partendo da quei triangoli che hanno la base misurata per uno dei loro lati, e costruendo ciascun angolo per intersecazione d'archi. Questo metodo, quantunque più esatto di quello eseguito con sole costruzioni grafiche, non va però esente da errori, i quali insensibili se considerati isolatamente, non tralasciano di produrre un notevole spostamento nei punti estremi della rete trigonometrica.

Ogniqualvolta si vogliano evitare simili spostamenti, converrà ricorrere al metodo di riferire tutti i punti della triangolazione a due rette normali l'una all'altra, ossia, *si do-*

vranno calcolare le distanze di tutti i vertici dei triangoli a due assi ortogonali. In tutte le operazioni geodetiche si prendono per assi di coordinamento *la meridiana* del luogo principale del tratto di terreno che si rileva, ed *una perpendicolare* alla medesima condotta per lo stesso luogo, prolungate l'una e l'altra indefinitamente. Vedremo in una delle prossime lezioni cosa sia una meridiana e come si determini sul terreno; ci occuperemo frattanto delle operazioni e delle correzioni fin qui accennate.

90. **Scelta dei triangoli.** — Acciocchè una rete trigonometrica sia ben condizionata bisogna che i triangoli che la compongono non si allontanino troppo dalla forma equilatera, per quanto lo comportano le accidentalità del terreno su cui si opera.

Abbiamo in altre circostanze detto essere questa condizione necessaria, onde evitare le intersecazioni troppo oblique: trattandosi ora di ottenere le lunghezze dei lati de' triangoli mediante il calcolo, si potrebbe supporre essere tale condizione per lo meno superflua; ed infatti lo sarebbe se si fosse certi di non commettere errori nella misura delle basi e degli angoli. Ora per quanto perfetto sia uno stromento, e per quanto accuratamente si operi, non si potranno mai evitare alcuni errori, i quali, quantunque minimi, accumulandosi possono cagionarne dei gravissimi negli ultimi risultamenti della triangolazione, come ora mi accingo a dimostrarvi.

Sia b la base di un triangolo, B l'angolo opposto alla base, A uno degli angoli adiacenti alla base ed a il lato opposto a quest'angolo: fra b, B, A ed a, v'ha la seguente relazione (§ 83):

$$b \, sen \, A = a \, sen \, B \, .$$

Si supponga da prima la base b misurata esattamente, e siano x ed x' gli errori piccolissimi fatti in più nella misura degli angoli A e B, ed y l'errore, che sarà pure piccolissimo, risultante sul lato a. La precedente relazione diventa:

$$b\, sen(A+x)=(a+y)\, sen(B+x')\,,$$

o mettendo per $sen(A+x)$ e per $sen(B+x')$ i valori ricavati dalle equazioni (A),

$$b(sen A \cos x + \cos A\, sen x)=(a+y)(sen B \cos x' + \cos B\, sen x').$$

Ora essendo x' ed x piccolissimi, si possono supporre uguali, e si può fare $\cos x' = \cos x = 1$, $sen x' = sen x = x$ (§ 79), senza errori sensibili; l'ultima equazione si trasforma adunque nella seguente:

$$b(sen A + x \cos A)=(a+y)(sen B + x \cos B)\;:$$

ovvero eseguendo i calcoli;

$$\begin{aligned} b\, sen A + b x \cos A = {} & a\, sen B + a x \cos B \\ & + y\, sen B + y x \cos B\,. \end{aligned}$$

Osservando finalmente che $b\, sen A = a\, sen B$, e che y ed x essendo estremamente piccoli, si può trascurare il prodotto $yx \cos B$; si avrà:

$$b x \cos A = a x \cos B + y\, sen B\,;$$

donde $$y=\frac{b x \cos A}{sen B}-\frac{a x \cos B}{sen B}\,,$$

ed essendo $\dfrac{b}{sen B}=\dfrac{a}{sen A}$, si potrà sostituire il secondo membro di questa relazione al primo, nel primo termine

dell'equazione che dà il valore di y; donde risulterà:

$$y=ax\left(\frac{\cos A}{\operatorname{sen} A}-\frac{\cos B}{\operatorname{sen} B}\right)=ax(\cot A-\cot B) .$$

Se invece di supporre x positivo si fosse supposto negativo, si sarebbe trovato per y lo stesso valore.

Se ora in questa formola si fa $A=B$, si avrà:

$$y=0 .$$

Dunque se in un triangolo v'hanno due angoli uguali, i piccoli errori fatti nello stesso senso sulla misura degli angoli non influiscono sui lati opposti. In questo caso la forma equilatera è adunque la migliore che possa avere un triangolo.

Se gli errori fatti sugli angoli, essendo tuttavia eguali in quanto ai valori, avessero segni contrari, l'espressione di y trovata qui sopra si trasformerebbe, come è facile riconoscere cambiando il segno di x' nei precedenti ragionamenti, e diverrebbe:

$$y=ax\left(\frac{\cos A \operatorname{sen} B+\operatorname{sen} A \cos B}{\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B}\right) ;$$

sostituendo al numeratore della frazione che moltiplica ax il primo membro della prima fra le equazioni (A) § 73, ed osservando che la quarta delle equazioni (II) § 76, dà

$$\operatorname{sen} A \operatorname{sen} B=\frac{1}{2}\cos(A-B)-\frac{1}{2}\cos(A+B) ,$$

si otterrà:

$$y=\frac{ax \operatorname{sen}(A+B)}{\frac{1}{2}[\cos(A-B)-\cos(A+B)]} ;$$

ed essendo

$$sen(A+B)=sen[180^\circ-(A+B)]=sen\,C,$$

e $$cos(A+B)=cos[180^\circ-(A+B)]=-cos\,C;$$

si avrà finalmente:

$$y=\frac{2ax\,sen\,C}{cos(A-B)+cos\,C},$$

e se in quest'ultima espressione si farà $A=B$, si otterrà:

$$y=\frac{2ax\,sen\,C}{1+cos\,C},$$

che è evidentemente il più piccolo valore che possa ricevere y, perchè il denominatore $1+cos\,C$ è il più grande possibile (*).

È adunque dimostrato essere la forma equilatera la migliore che si possa dare ai triangoli di una rete trigonometrica. Essendo però assai difficile che si possa sul terreno ottenere una tale condizione, si rigettano soltanto gli angoli minori di 30° e maggiori di 120°; ed anzi in alcune circostanze particolari bisogna pur anche accettare alcuni angoli benchè oltrepassino tali limiti. In generale essendo A, B, C e D (fig. 20) quattro punti di stazione, da ognuno de' quali si possano scorgere gli altri tre, ai triangoli ABC, CAD, si dovranno sempre preferire i due ABD e BDC che più si avvicinano al triangolo equilatero.

(*) PUISSANT. *Traité de géodésie*. Livre III. chap. II. - FRANCOEUR. *Géodésie*. Pag. 110-112. - SALNEUVE. *Cours de topographie et de géodésie*. L. III. c. II. - TESTU. *Topographie et géodésie élémentaire*. Notes. Art. III.

Se nella formola $a = b\frac{sen\,A}{sen\,B}$ si suppongono esattamente misurati gli angoli e si chiamano: x un piccolo errore commesso sulla base b, y quello risultante sul lato dedotto a, si avrà:

$$a + y = b\frac{sen\,A}{sen\,B} + x\frac{sen\,A}{sen\,B};$$

da cui si deduce, togliendo da una parte a e dall'altra il suo equivalente $b\frac{sen\,A}{sen\,B}$:

$$y = x\frac{sen\,A}{sen\,B}.$$

Questa espressione di y dimostra che l'errore risultante sul lato dedotto è uguale a quello fatto nella misura della base, se $A = B$, è minore o maggiore di questo errore se $A \lessgtr B$.

Sia, per esempio, $B = 30°$, sarà $sen\,B = \frac{1}{2}$ (§ 71), ed $y = x\frac{sen\,A}{\frac{1}{2}} = 2x\,sen\,A$. Ma in tal caso $A + C = 150°$, e, da quanto abbiam detto poco fa, ciascuno dei due angoli A e C non deve essere molto diverso da $75°$; $sen\,A$ è dunque poco lontano da 1, epperciò y è quasi eguale a $2x$. L'errore x commesso sulla base viene adunque a cadere sul lato a, e può, anche in condizioni per altre circostanze favorevoli, dupplicarsi, e aumentando così da un triangolo all'altro, può al fine produrre risultati affatto erronei sugli ultimi lati della rete trigonometrica (*).

(*) Puissant. Francoeur. Opere citate.

La base deve adunque misurarsi con tutta l'attenzione possibile, e non deve essere troppo piccola in confronto degli altri lati, perchè in caso contrario, un errore anche piccolissimo commesso nella misura della base, produce inconvenienti assai maggiori di quello che non accada per gli errori incorsi nella misura degli angoli.

Da tutto ciò ne segue, che non potendosi scegliere una base pressochè eguale ai lati de' triangoli (e ciò, come vedremo, succede sempre in una grande triangolazione), non conviene unire immediatamente i punti trigonometrici prestabiliti A, B, ... F, G, H ecc. (fig. 21), alla base ab, mediante triangoli estremamente irregolari, come sarebbe quello abD; ma col mezzo di alcuni triangoli minori abA, Abc, AcB, i cui lati vanno a poco a poco aumentando, si passa dalla base ab ai lati BC, BD, BE ecc., dei grandi triangoli.

91. **Coordinamento di più punti a più basi.** — Gli inevitabili errori che si vanno facendo nella misura della base e degli angoli, ne cagionano degli altri sui lati dedotti, da principio insensibili, ma che accumulandosi a poco a poco possono produrne verso le estremità della rete, di quelli non più trascurabili: nella pratica è bensì vero che tali errori non facendosi sempre nello stesso senso, accade il più spesso che siavi nel risultato finale un compenso tale da non rendere calcolabile la differenza totale; ma ad accertarsi del grado di precisione che si è ottenuto, conviene procurarsi qualche mezzo di verificazione. Un primo mezzo di verificazione si presenta da sè nel calcolare i lati: esso consiste in ciò, che si è di tanto in tanto costretti di calcolare un lato comune a due o più triangoli, due o più volte, pervenendo a questo lato per vie diverse. Ora è evidente che se i di-

versi risultati trovati per uno stesso lato concordano, o differiscono solo di quantità tollerabili, si può presumere che non siavi occorso alcun errore sensibile nella misura degli angoli, nè una somma di piccoli errori tale da rendere difettosa la triangolazione in quelle parti che si trascorsero per giugnere a quel lato. Un secondo mezzo di verificazione si procura col misurare alcune rette che prendono il nome di *basi di verificazione* o *di controllo*, le quali servendo di lati agli ultimi triangoli della rete trigonometrica, ed essendo sparse sulla periferia del territorio che si rileva, oltre all'essere misurate direttamente, si calcolano come tutti gli altri lati, e se i due risultati, cioè quello del calcolo e quello della misura diretta, sono eguali o non differiscono fra loro che di una quantità che non oltrepassi i limiti della tolleranza, la triangolazione è esatta; in caso diverso si dovrà rifare l'operazione, almeno in quella parte in cui si può giudicare essere occorsi gli errori.

LEZIONE DECIMA.

MISURA DI UNA BASE TRIGONOMETRICA.
RIDUZIONE DELLE DISTANZE ALL'ORIZZONTE.

(letta il 24 marzo 1851.)

Signori,

La misura di una base è l'operazione più importante, più difficile e più delicata della geodesia. In generale le principali considerazioni da farsi nell'intraprendere la misura di una base trigonometrica sono le seguenti:

1.° *Scelta del terreno:*

2.° *Influenza delle variazioni termometriche ed igrometriche dell'atmosfera sugli stromenti che servono alla misura effettiva.*

3.° *Scelta degli stromenti e loro uso.*

92. **Misura di una base trigonometrica.** — Il terreno sul quale si deve stabilire una base trigonometrica vuol essere unito e scoperto, quasi orizzontale e rettilineo, ed è necessario che da una delle estremità della base si possa scoprire l'altra. È pure importante che le estremità della base siano scelte in modo che si possa, stando in esse, scoprire il più gran numero di punti trigonometrici. È però difficilissimo lo incontrare una località che presenti riuniti tutti questi

vantaggi. Gli alvei dei fiumi che hanno un leggero pendio, le strade ed i gerbidi, offrono i siti più favorevoli alla misura di una base.

2.° Se nella misura della base si impiegassero regoli di metallo, sarebbe indispensabile il tener conto delle loro dilatabilità. A suo luogo indicheremo succintamente le osservazioni da farsi, ed i calcoli da istituirsi a quest'uopo, allorchè trattisi di ottenere la lunghezza la più precisa di una base trigonometrica da cui debba partire la triangolazione di un vasto tratto della superficie terrestre.

3.° Scelto il sito sul quale vuolsi stabilire la base, si traccia un allineamento con piuoli, con paline o con pertiche ben diritte e ferrate inferiormente, per poterle più facilmente far penetrare nel suolo. Queste pertiche portano superiormente una banderuola ordinariamente bianca e rossa, oppure hanno la parte superiore colorita in bianco e rosso onde poterle scoprire in lontananza. Per tracciare una linea retta di ragguardevole lunghezza con tali pertiche o segnali, si dispone a qualche distanza da uno degli estremi della base un teodolite, in modo che l'asse del suo cannocchiale si muova nel piano verticale che passa per la linea che si vuol tracciare, e misurando colle canne o colla catena, si fanno disporre i segnali di 200 in 200 metri di distanza fra loro, tutti perfettamente in uno stesso piano.

Secondo l'importanza del rilevamento, le estremità della base si segnano o con piuoli o con termini, in muratura ed in pietra da taglio: questi termini devono avere sul centro della loro superficie superiore un segno che indichi il vero punto da cui ebbe principio la misura, ed il punto preciso in cui si è terminata. Per rendere questo punto più visibile, si fa incidere su ogni termine un triangolo equilatero, nel

cui interno siavi un circolo, e si segna il punto nel centro di questo circolo. Questi termini poi, se devono essere conservati, si collocano a qualche profondità sotto il suolo, acciocchè non possano venir facilmente schiantati. In questo caso devonsi rilevare sul terreno tutti quei dati che possono far rinvenire i detti termini ogniqualvolta se ne faccia ricerca.

Tracciata la base, si portano successivamente lungo di essa due o tre regoli di lunghezza esattamente cognita, fra loro uguali, o la cui differenza sia piccolissima, e si prende in questo caso per lunghezza di ciascuno dei detti regoli, la media delle due o tre lunghezze. I regoli si mettono coi loro estremi a contatto, e si dispongono orizzontalmente nel piano verticale che contiene la base.

Questi regoli possono variare e nella forma e nella materia. Nelle grandi triangolazioni eseguite in Francia, in Italia ed altrove, si fece nso di regoli di platino e di ferro, in Inghilterra si impiegarono pur anche dei tubi di vetro, ma la loro fragilità è un inconveniente abbastanza grave per farli rigettare, ed il peso dei regoli di metallo è anche un incomodo che conviene evitare, specialmente ove debbansi fare frequenti misure di basi. Sono perciò in questi casi preferibili i regoli di legno d'abete. I regoli di legno destinati alla misura delle basi, oltre all'essere più leggeri di quelli di metallo, hanno il vantaggio di essere meno sensibili alle variazioni di temperatura, e la dilatazione in loro cagionata dall'umidità dell'aria pare si faccia tutta nel senso della grossezza. Onde meglio guarentire questi regoli dagli effetti delle variazioni igrometriche si sogliono far bollire in un liquido grasso, come, ad esempio, nell'olio di lino, e si coprono quindi interamente di vernice: per renderli più

insensibili ancora agli effetti dell'umidità, ed aumentarne la leggerezza senza diminuirne la solidità, si fecero alcuna volta in forma di parallelepipedo cavo. Si adoperarono in alcune triangolazioni dei regoli di cinque metri di lunghezza, ma sono in allora soggetti ad incurvarsi assai facilmente: ad evitare tale inconveniente si formarono di più pezzi uniti insieme nel modo indicato dalla fig. 22; ma una tale costruzione non tralascia di avere i suoi incomodi nell'uso che se ne deve fare. La lunghezza più comoda sembra essere quella di quattro metri; la forma migliore, la parallelepipeda a sezione quadrata, con teste in metallo acciocchè il fregamento non le consumi. I regoli devono infine essere campionati con somma esattezza.

Per disporre i regoli in linea retta ed orizzontalmente si impiegano due trepiedi per ogni regolo (fig. 23), e questi trepiedi sono muniti ciascuno di un sostegno terminato inferiormente in una vite, mediante la quale si possono alzare od abbassare a volontà, finchè il filo a piombo di un livello a pendolo indichi l'orizzontalità del regolo.

Quando il suolo è molto accidentato, non è più possibile di mettere le estremità dei regoli a contatto; conviene allora assicurarsi che i loro capi $A'B$, $B'A''$ (fig. 24) sieno in una medesima verticale, col mezzo di un filo a piombo, il cui peso si immerge nell'acqua acciocchè il vento non lo agiti. Questo mètodo pare anche migliore di quello del contatto immediato, perchè si scansano così gli inconvenienti che potessero nascere da un involontario urto, anche leggero, dato al regolo che già è collocato a suo luogo. In questo caso si deve tener conto della grossezza del filo, perchè, quantunque sia in se stessa di niuna entità, ripetuta però un certo numero di volte, non è più da trascurarsi.

93. **Livello di pendenza.** — Volendo risparmiare il tempo che si richiede nel porre orizzontali i regoli, si dovrebbe ad ogni portata misurare l'inclinazione di ciascuno di essi e notarle in nn apposito registro. Ma allora i regoli non dovrebbero avere molta grossezza, perchè, come si scorge dalla fig. 25, le proiezioni dei tre regoli AB, CD ed EF essendo ab, cd, ef, e la distanza compresa fra i fili a piombo estremi, Aa, Fg, essendo ag, si avrebbe:

$$ab+cd+ef=ag-(bc+de+fg);$$

cosicchè alla somma delle proiezioni dei tre regoli si dovrebbe aggiungere la somma delle proiezioni delle mezze grossezze dei regoli inclinati. Questa correzione si evita coll'impiegare regoli sottili.

Le inclinazioni dei regoli si ottengono mediante un livello a pendolo detto *livello di pendenza*. Esso ha la forma di un triangolo isoscele come quello già descritto, colla differenza che questo invece di avere i due lati uguali uniti da un listello, ha fra questi lati un arco di circolo graduato, in metallo, il cui centro è al vertice del triangolo, ed ha il zero sul suo mezzo: il filo a piombo che cade liberamente dal vertice segna sull'arco i gradi di pendenza.

La costrnzione e l'uso di questo stromento sono fondati sulle seguenti considerazioni: sia AB una linea inclinata (fig. 26), CB la sua proiezione orizzontale; sia DEF il livello di pendenza, EG la linea che divide l'arco mn per metà, ed è perciò perpendicolare ad AB, e sia finalmente EP la direzione del filo a piombo, o la verticale. I due triangoli rettangoli GEH, BHP sono simili per avere un angolo, che non è il retto, opposto al vertice; l'angolo GEH è adnnque uguale all'angolo ABC. Ma l'angolo ABC è

l'inclinazione della retta AB sull'orizzontale BC; dunque misurando l'angolo GEH si verrà a conoscere l'angolo di pendenza cercato. Però nella misura di una base essendo necessario di avere gli angoli di pendenza con qualche precisione, e non potendo lo stromento ora descritto dare se non una men che mediocre approssimazione, si fa uso di un livello di pendenza più perfezionato (fig. 27), il quale invece del filo a piombo ha sospesa in C un'alidada che si muove intorno al punto di sospensione, ed è munita in V di un verniere che dà i minuti: perpendicolarmente all'alidada v'è un piccolo livello a bolla d'aria ll'.

La verificazione del livello di pendenza si fa invertendolo in modo che i suoi piedi vengano ad occupare l'uno il posto dell'altro; in questa inversione il filo a piombo o l'alidada devono segnare lo stesso numero di gradi dall'una e dall'altra parte del zero. Quando ciò non avesse luogo, si potrebbe pur sempre adoperare lo stromento, facendo ad ogni stazione due osservazioni in senso contrario l'una dell'altra, la media delle due letture sarebbe il vero angolo di pendenza.

94. **Riduzione di una base all'orizzonte, ed operazione inversa.** — Se il terreno su cui si misura la base fosse un piano inclinato, o fosse composto di due, tre o più piani inclinati (fig. 28), si potrebbero misurare le parti della base comprese in ciascun piano, allineando i regoli sullo stesso terreno; poscia con una livellazione si cercherebbero le differenze di livello AP, BQ, CR, ecc., fra i punti estremi d'ogni piano inclinato: le proiezioni orizzontali PB, QC, RD, ecc., sarebbero i cateti di tanti triangoli rettangoli facili a calcolarsi, i quali sommati assieme darebbero la riduzione MD cercata. Oppure prendendo gli angoli di pendenza con un eclimetro, che è un'altra specie di livello che

verrà a suo luogo descritto, ed operando poscia come ora diremo.

Si misurino gli angoli di pendenza di ogni regolo, o quelli soltanto d'ogni piano inclinato, la riduzione delle distanze all'orizzonte si eseguirà sempre nel seguente modo:

Sia x la distanza orizzontale cercata CB (fig. 29), l la misura diretta della linea AB, α l'angolo di pendenza ABC; si avrà

$$x = l \cos \alpha .$$

Dunque *per ridurre all'orizzonte una distanza misurata lungo una linea inclinata all'orizzonte, si deve moltiplicare la lunghezza trovata per il coseno dell'angolo di pendenza.*

Reciprocamente se si conoscesse la distanza orizzontale x e si cercasse la lunghezza di l, si avrebbe:

$$l = \frac{x}{\cos \alpha} .$$

Si troverebbe evidentemente la differenza di livello AC, dopo di aver misurato la linea $AB = l$ e l'angolo α, col fare

$$AC = l \operatorname{sen} \alpha .$$

Essendo α, α', α'', ecc., gli angoli di pendenza, ed l la lungbezza di ciascun regolo, si avrà per la distanza orizzontale totale:

$$L = l(\cos \alpha + \cos \alpha' + \cos \alpha'' + \ldots\ldots) .$$

Se nella riduzione di una base all'orizzonte, il terreno avesse una leggera inclinazione, siccome i coseni per angoli piccolissimi variano assai poco, mentre i seni hanno invece, per piccole differenze in simili angoli, delle varia-

zioni sensibili, conviene allora sostituire il seno al coseno, nella ricerca del valore di x.

Ora dalla relazione

$$x = l \cos \alpha ,$$

si deduce $\quad l - x = l - l \cos \alpha = l(1 - \cos \alpha)$;

ma dalle equazioni (C), si ricava:

$$1 - \cos \alpha = 2 \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha ;$$

dunque $$l - x = 2 l \operatorname{sen}^2 \frac{1}{2} \alpha .$$

Quest'ultima equazione fa conoscere la differenza fra la distanza misurata e la sua proiezione orizzontale. Ora il seno di un arco piccolissimo essendo sensibilmente eguale all'arco, si potrà fare:

$$l - x = 2 l \frac{1}{4} \alpha^2 = \frac{1}{2} l \alpha^2 .$$

Ma α è la misura di un angolo che si può supporre dato in minuti, mentre $l - x$ è una lunghezza espressa in unità lineari, e si dovrà moltiplicare $\frac{1}{2} l \alpha^2$ per $\operatorname{sen}^2 1'$ se si vuole che anche il secondo membro di quest'ultima equazione sia espresso in unità lineari. Difatto, il seno di $1'$ è presso a poco eguale ad arco $1'$, dunque v'ha

$$1' : arco\, 1' :: 1' : \operatorname{sen} 1' :: \alpha : x = \alpha \operatorname{sen} 1' ,$$

e se l'arco α è dato in minuti, come si suppone in questa proporzione, $\alpha \operatorname{sen} 1'$ sarà evidentemente lo sviluppo di quest'arco nel circolo di raggio uguale ad *uno*, o in altri ter-

mini, sarà la ragione fra l'arco dato e l'arco eguale al raggio, considerati entrambi in uno stesso circolo, e la precedente equazione si trasformerà nella seguente:

$$l - x = \frac{1}{2} l \alpha^2 sen^2 1' ;$$

donde

$$x = l\left(1 - \frac{1}{2}\alpha^2 sen^2 1'\right) .$$

95. **Calcolo per la riduzione all'orizzonte delle distanze lette sulla stadia.** — Prima di abbandonare l'argomento della riduzione delle distanze all'orizzonte non è fuor di proposito lo indicare i calcoli da istituirsi onde ridurre all'orizzonte le distanze corrispondenti a quelle lette sulla stadia verticale, nel caso in cui per fare la lettura siasi dovuto rimuovere il cannocchiale dall'orizzontalità.

Sia $AB = CD = D$ (fig. 30) la linea inclinata di cui si cerca la proiezione orizzontale, $BP = X$ questa proiezione, α l'angolo di pendenza, C l'obbiettivo del cannocchiale, $MN = L$ ciò che si legge sull'asta posta verticalmente in A, $mn = l$ ciò che si leggerebbe se l'asta fosse inclinata in D, in modo da essere perpendicolare al prolungamento dell'asse del cannocchiale.

Sarà

$$\text{angolo } mDM = nDN = ABP = \alpha ;$$

ma per essere gli angoli DCN e DCM piccolissimi, gli angoli DnN e DmM si potranno considerare come retti, e si avrà prossimamente:

$$Dn = DN \cos\alpha \quad , \text{e } Dm = DM \cos\alpha ,$$

donde

$$mn = MN \cos\alpha ,$$

ossia

$$l = L \cos\alpha .$$

Ora secondo il metodo ordinario di dividere la stadia, si prende l per la lunghezza di AB, ed essendo

$$BP=X=AB\cos\alpha=l\cos\alpha\ ,$$

sostituendo ad l il suo valore $L\cos\alpha$, si avrà finalmente:

$$X=L\cos^2\alpha\ .$$

Se invece si fa $D=\frac{F}{h}H+F$ (§ 12), si otterrà

$$X=\left(\frac{F}{h}H+F\right)\cos\alpha=\frac{F}{h}L\cos^2\alpha+F\cos\alpha\ ,$$

per essere $H=l=L\cos\alpha$, e per la piccolezza del termine $F\cos\alpha$, essendo indifferente di sostituirgli $F\cos^2\alpha$, sarà finalmente:

$$X=\left(\frac{F}{h}L+F\right)\cos^2\alpha\ ,$$

e chiamando infine D la quantità $\frac{F}{h}L+F$, si avrà:

$$X=D\cos^2\alpha\ .$$

La proiezione orizzontale cercata si trova adunque *moltiplicando la distanza dedotta dalla lettura della stadia, pel coefficiente* $\cos^2\alpha$, *che varia col variare dell'angolo di pendenza.* A quest'uopo si calcolano delle tavole analoghe a quelle dei seni e delle tangenti: per dare un'idea di queste tavole, presentiamo i coefficienti calcolati per gli angoli, di 5 in 5 gradi.

TAVOLA DEI COEFFICIENTI

per la riduzione all'orizzonte delle distanze lette sulla stadia verticale, calcolate di cinque in cinque gradi.

$$X = D \cos^2 \alpha \;\ldots\; \text{Log}\, X = \text{Log}\, D + 2 \log \cos \alpha$$

Angoli di pendenza α	Coefficienti $\cos^2 \alpha$	Angoli di pendenza α	Coefficienti $\cos^2 \alpha$
0°	1,0000	50°	0,4132
5°	0,9924	55°	0,3290
10°	0,9698	60°	0,2500
15°	0,9330	65°	0,1786
20°	0,8830	70°	0,1170
25°	0,8214	75°	0,0670
30°	0,7500	80°	0,0302
35°	0,6710	85°	0,0076
40°	0,5868	90°	0,0000
45°	0,5000		

Abbiamo detto (§ 13) che adoperando le scale di riduzione, è necessario d'inclinare la stadia perpendicolarmente al prolungamento dell'asse del cannocchiale, e che se si lascia la stadia verticale, si deve ripetere due volte la riduzione: infatti sia AB (fig. 31) la distanza inclinata della quantità α, sarà in primo luogo $AC = AB \cos \alpha$, e se si fa $AD = AC$, si avrà

$$AE = AD \cos \alpha = AB \cos^2 \alpha \,,$$

ossia

$$X = D \cos^2 \alpha \,.$$



LEZIONE UNDICESIMA.

DETERMINAZIONE DI UN PUNTO COL MEZZO DI ALTRI TRE NOTI DI POSIZIONE.

RIDUZIONE DI UN ANGOLO ALL'ORIZZONTE.

(letta il 28 marzo 1851.)

SIGNORI,

La determinazione di un punto mediante tre altri punti dati di posizione, questione che già risolvemmo col mezzo della tavoletta, verrà ora da noi trattata numericamente, secondo il metodo di *Delambre*, generalmente adottato.

96. **Determinazione di un punto per mezzo di altri tre noti di posizione.** — Supponiamo che dal punto D (fig. 32), che si tratta di determinare, si siano osservati i due angoli ADB, ADC.

Chiamiamo γ e β questi due angoli; D, D' e D'' le distanze incognite AD, BD e DC, del punto D, a ciascuno degli altri tre A, B, C; siano finalmente $ACD=x$, $ABD=y$: si conoscono i tre angoli A, B, C e i tre lati a, b, c del triangolo ABC; si cercano i due angoli x ed y, e le tre distanze D, D' e D''.

Il primo caso de' triangoli obbliquangoli dà pel triangolo ABD:

$$D=\frac{c \operatorname{sen} y}{\operatorname{sen} \gamma}$$

e pel triangolo ACD.

$$D=\frac{b \, sen \, x}{sen \, \beta}:$$

donde

$$\frac{c \, sen \, y}{sen \, \gamma}=\frac{b \, sen \, x}{sen \, \beta}$$

ossia

$$\frac{sen \, x}{sen \, y}=\frac{c \, sen \, \beta}{b \, sen \, \gamma}.$$

Quest'ultima equazione si può evidentemente trasformare nella seguente:

$$\frac{sen \, x + sen \, y}{sen \, x - sen \, y}=\frac{c \, sen \, \beta + b \, sen \, \gamma}{c \, sen \, \beta - b \, sen \, \gamma};$$

e dividendo il numeratore ed il denominatore del secondo membro per $c \, sen \, \beta$, si avrà:

$$\frac{sen \, x + sen \, y}{sen \, x - sen \, y}=\frac{1+\frac{b \, sen \, \gamma}{c \, sen \, \beta}}{1-\frac{b \, sen \, \gamma}{c \, sen \, \beta}}$$

Ma dalle equazioni (L), si ha:

$$\frac{sen \, x + sen \, y}{sen \, x - sen \, y}=\frac{tang \frac{1}{2}(x+y)}{tang \frac{1}{2}(x-y)};$$

dunque:

$$\frac{tang \frac{1}{2}(x+y)}{tang \frac{1}{2}(x-y)}=\frac{1+\frac{b \, sen \, \gamma}{c \, sen \, \beta}}{1-\frac{b \, sen \, \gamma}{c \, sen \, \beta}},$$

Se ora si fa:

$$\frac{b\ sen\ \gamma}{c\ sen\ \beta} = tang\ \varphi\ ,$$

l'ultima equazione si trasforma nella seguente:

$$\frac{tang\frac{1}{2}(x+y)}{tang\frac{1}{2}(x-y)} = \frac{1+tang\ \varphi}{1-tang\ \varphi}\ . \qquad (1)$$

Se nell'equazione (E) (§ 75), che fa conoscere la tangente della somma di due archi in funzione delle tangenti di questi archi, si suppone $a = 45°$, $b = \varphi$; si ottiene:

$$tang(45° + \varphi) = \frac{tang\ 45° + tang\ \varphi}{1 - tang\ 45°\ tang\ \varphi}\ ,$$

ed osservando che $tang\ 45° = 1$. si conchiuderà:

$$tang(45° + \varphi) = \frac{1 + tang\ \varphi}{1 - tang\ \varphi}\ .$$

Portando questo valore di $\frac{1+tang\ \varphi}{1-tang\ \varphi}$, a vece di quest'espressione, nell'equazione (1), si avrà:

$$\frac{tang\frac{1}{2}(x+y)}{tang\frac{1}{2}(x-y)} = tang(45° + \varphi)\ ,$$

da cui si deduce:

$$tang\frac{1}{2}(x-y) = \frac{tang\frac{1}{2}(x+y)}{tang(45° + \varphi)}\ .$$

ossia finalmente:

$$tang\frac{1}{2}(x-y)=tang\frac{1}{2}(x+y)cot(45^\circ+\varphi)\ .$$

Ora $\frac{x+y}{2}$ si conosce, perchè nel quadrilatero $ABDC$ v'ha:

$$x+y+A+\beta+\gamma=360^\circ\ ;$$

epperciò:
$$\frac{x+y}{2}=180^\circ-\frac{A+\beta+\gamma}{2}\ ;$$

per conseguenza, l'ultima equazione trovata farà conoscere $\frac{x-y}{2}$, e supponendo $\frac{x+y}{2}=m$, $\frac{x-y}{2}=n$, si troveranno x ed y per addizione e per sottrazione, vale a dire che si avrà:

$$x=m+n\ ,\qquad y=m-n\ .$$

Trovati i due angoli x ed y, i valori di D, D' e D'' dipenderanno dal primo caso dei triangoli obbliquangoli, e saranno:

$$D=\frac{b\ sen\ x}{sen\ \beta}\ ,\ \text{triangolo } ACD\ ,$$

oppure
$$D=\frac{c\ sen\ y}{sen\ \gamma}\ ,\ \text{triangolo } ABD\ .$$

$$D'=\frac{c\ sen\ BAD}{sen\ \gamma}=\frac{c\ sen\ (y+\gamma)}{sen\ \gamma}\ ,\ \text{triangolo } ABD\ ,$$

ovvero

$$D'=\frac{a\ sen\ BCD}{sen\ (\beta+\gamma)}=\frac{a\ sen\ (x-C)}{sen\ (\beta+\gamma)}\ ,\ \text{triangolo } BCD$$

$$D'' = \frac{b \, sen(x+\beta)}{sen \, \beta} = \frac{a \, sen(y-B)}{sen(\beta+\gamma)},$$

triangolo ACD o triangolo BCD.

Il valore dell'angolo A che entra nella relazione $\frac{x+y}{2} = 180^\circ - \frac{A+\beta+\gamma}{2}$, non è sempre quello del triangolo ABC, ma è qualche volta ciò che manca a quest'angolo per fare 360°; ciò succede allorchè il punto A si trova nell'interno del triangolo BCD (fig. 33). In questo caso si dovrà mettere, per x ed y, $x+C$ ed $y+B$ nei valori di D' e di D'', perchè gli angoli C e B invece di essere interni, sono esterni al quadrilatero $ABDC$.

Se il punto D (fig. 34) è nell'interno del triangolo ABC, la somma dei due angoli γ e β è maggiore di due angoli retti, e se il punto D cadesse sul lato $BC = a$ (fig. 35), la somma $\beta+\gamma$ sarebbe uguale a due angoli retti, e si avrebbe:

$$sen \, \gamma = sen \, \beta, \qquad tang \, \varphi = \frac{b}{c},$$

ed

$$x = B, \qquad y = C.$$

Finalmente se i quattro punti si trovassero sulla circonferenza di uno stesso circolo (fig. 36) il problema sarebbe indeterminato, perchè vi sarebbe allora:

$$x+y = 180^\circ \qquad \text{donde } sen \, x = sen \, y;$$

ed $A+\gamma+\beta = 180^\circ$, donde $\gamma+\beta = 180^\circ - A$ (*);

(*) Puissant. *Traité de géodésie*. Tom. I. chap. X. — Francoeur. *Géodésie*. Livre I. chap II. — Testu. *Topographie et géodésie élémentaire*. Liv. I. chap. I.

$$tang\,\varphi = \frac{sen\,y}{sen\,x} = 1 = tang\,45^\circ,$$

$$tang\,\frac{1}{2}(x+y) = tang\,90^\circ = \infty,$$

$$cot\,(45^\circ+\varphi) = cot\,90^\circ = 0\,;$$

e finalmente: $tang\,\frac{1}{2}(x-y) = \infty \times 0 = \frac{0}{0}$,

che è il segno dell'indeterminazione.

Esempio numerico.

Dati $A = 75^\circ\,26'\,31''$ $\quad b = 1617^m,49$

$\beta = 33^\circ\,\;8'\,28''$ $\quad c = 1915^m,54$

$\gamma = 47^\circ\,\;7'\,57''$

$155^\circ\,42'\,56''$

$$\frac{A+\beta+\gamma}{2} = 77^\circ\,51'\,28''$$

$$\frac{x+y}{2} = 102^\circ\,\;8'\,32''$$

Calcolo di φ.

$$tang\,\varphi = \frac{b\,sen\,\gamma}{c\,sen\,\beta}$$

$log\,b = 3,2088416$

$log\,sen\,\gamma = 9,8650618$

$c.\,log\,c = 6,7177086$

$c.\,l.\,sen\,\beta = 0,2622486$

$log\,tang\,\varphi = 10,0538606 = log\,tang\,48^\circ\,32'\,37'',6$

$+45^\circ$

$45^\circ+\varphi = 93^\circ\,32'\,37'',6\,.$

Calcolo di x e di y.

$$\tang \frac{x-y}{2} = \tang \frac{x+y}{2} \cot (45^\circ + \varphi).$$

$$\log \tang \frac{x+y}{2} = 10,6672539 - = \log \cot 12^\circ 8' 32''.$$

$$\log \cot (45^\circ + \varphi) = 8,7918981 - = \log \tang 3^\circ 32' 37'';6$$

$$\log \tang \frac{x-y}{2} = 9,4591520 = \log \tang 16^\circ 3' 28''$$

$$\frac{x+y}{2} = m = 102^\circ \; 8' \; 32''.$$

$$\frac{x-y}{2} = n = 16. \; 3. \; 28$$

$$x = m + n = 118^\circ \; 12' \; 0''$$

$$y = m - n = 86. \; 5. \; 4.$$

Calcolo di D.

$$D = \frac{b \sen x}{\sen \beta}, \text{ triangolo } ACD.$$

$\beta = 33^\circ \; 8' \; 29''$	$\log b = 3,20884$
$x = 118.12. \; 0$	$c.l. \sen \beta = 0,26225$
$CAD = 28.39.31$	$l. \sen x = 9,94511$
$180^\circ. \; 0'. \; 0''$	$\log D = 3,41620 = \log 2607,4.$

Calcolo di D'.

$$D' = \frac{c \, sen\,(y+\gamma)}{sen\,\gamma}, \ \text{triangolo } ABD.$$

$\gamma = 47°\ \ 7'\ 57''$	$log\,c = 3,28229$
$y = 86.\ \ 5.\ \ 4$	$c.l.\,sen\,\gamma = 0,13494$
$BAD = 46.\ 46.\ 59$	$l.sen(y+\gamma) = 9,86259$
$180°.\ 0'\ \ 0''$	$log\,D' = 3,27982 = log\,1904,7.$

Calcolo di D''.

$$D'' = \frac{b \, sen\,(x+\beta)}{sen\,\beta}, \ \text{triangolo } ACD.$$

$\beta = 33°\ \ 8'\ 29''$	$log\,b = 3,20884$
$x = 118.\ 12.\ \ 0$	$c.l.\,sen\,\beta = 0,26225$
$CAD = 28.\ 39.\ 31$	$l.sen(x+\beta) = 9,68087$
$180°.\ 0'\ \ 0''$	$log\,D'' = 3,15196 = log\,1418,9.$

In questo esempio numerico il punto D si troverebbe fuori del triangolo ABC, perchè la somma dei due angoli γ e β è minore di $180°$.

Nei calcoli di D, D' e D'' si presero i logaritmi con sole cinque decimali, perchè si è supposto che si volessero soltanto le approssimazioni fino ai decimetri, ciò che è sempre sufficiente in tali circostanze.

Il calcolo di φ non presenta alcuna difficoltà: nel calcolo

di x e di y si dovrebbe cercare *log tang* $108°8'32''$; ma v'ha (§ 72):

$$tang\,(90°+a) = -\,tang\,(90°-a) = -\,cot\,a\,.$$

Dunque si avrà:

$$tang\,102°8'32'' = tang\,(90°+12°8'32'') = -\,cot\,12°8'32''.$$

Sarà parimenti:

$$cot\,93°32'37'',6 = cot\,(90°+3°32'37'',6) = -\,tang\,3°32'37'',6.$$

Ma la cotangente e la tangente essendo negative; ed i logaritmi dei numeri negativi essendo immaginari (§ 62), si considereranno, nel presente ed in tutti i casi analoghi, come positive, e dopo di aver trovati i due logaritmi si distingueranno col segno meno, onde non confonderli coi logaritmi delle linee trigonometriche degli archi supplementari. Siccome però mettendo i segni meno prima dei logaritmi, si potrebbero questi supporre negativi, mentre in realtà sono positivi, i segni meno li posporremo, come ora abbiam fatto, ai logaritmi. Se questi segni saranno in numero impari la somma sarà il logaritmo d'una linea trigonometrica negativa, e se saranno in numero pari, la linea trigonometrica corrispondente alla somma dei logaritmi sarà positiva, ciò che appunto ha luogo nell'esempio da noi considerato.

97. **Riduzione di un angolo all'orizzonte.** — Non adoperando che stromenti coi quali si misurano immediatamente gli angoli orizzontali, non occorrerà di dover fare la riduzione degli angoli all'orizzonte. Potendosi tuttavia presentare il caso in cui si renda necessaria tale riduzione, non sarà forse affatto inutile l'occuparci alquanto di essa.

Si fa generalmente uso, per la riduzione degli angoli all'orizzonte, di una formola semplicissima ed elegante tratta dalla trigonometria sferica (*). Noi dobbiamo attenerci a quanto ci può somministrare in proposito la trigonometria rettilinea.

Suppongasi in primo luogo che nel triangolo ABC (fig. 37) siavi un lato AC orizzontale, e che si tratti di trovare sul piano orizzontale condotto per AC le proiezioni degli angoli ABC, BAC e BCA; o in altri termini, che si vogliano ridurre all'orizzonte i tre angoli del triangolo ABC.

Sul terreno, oltre ai tre angoli del triangolo ABC, si saranno misurati gli angoli di pendenza BAD, BCD dei due lati inclinati AB, BC.

Ciò posto, sia D la proiezione del punto B, sia DE perpendicolare ad AC; se si tira BE, sarà anche BE perpendicolare ad AC, e si avrà:

$$AE = AB \cos BAC = AD \cos DAC:$$

ma
$$AD = AB \cos BAD,$$

dunque: $AB \cos BAC = AB \cos BAD \cos DAC$,

e finalmente: $\cos DAC = \dfrac{\cos BAC}{\cos BAD}$.

(*) Si è osservato l'angolo $MON = O$ (fig. 39), e le distanze zenitali $COM = z$, $CON = z'$; si trova la proiezione orizzontale $mOn = o$ dell'angolo O, colla seguente formola:

$$sen\, \tfrac{1}{2} o = \sqrt{\frac{sen(s-z) . sen(s-z')}{sen\, z . sen\, z'}},$$

nella quale
$$s = \frac{z + z' + O}{2}.$$

Vale a dire che *il coseno della proiezione orizzontale di uno dei due angoli alla base, è uguale al quoziente risultante dalla divisione del coseno di quest'angolo, pel coseno dell'angolo di pendenza del lato adiacente allo stesso angolo.*

Ottenuti i due angoli DAC e DCB si troverà il terzo angolo CAD diffalcando la loro somma da due angoli retti.

Si supponga in secondo luogo che il triangolo ABC (fig. 38) abbia i suoi tre vertici disposti comunque nello spazio. Si calcoleranno, col mezzo di uno dei tre lati e degli angoli del triangolo, gli altri due lati, poscia si avrà:

$$AB' = AB\cos BAB' , \qquad AC' = AC\cos CAC' ,$$

$$C'B' = CH = CB\cos BCH .$$

Finalmente si troveranno i tre angoli del triangolo $AB'C'$ mediante i suoi tre lati, impiegando le formole del quarto caso dei triangoli obbliquangoli.

98. **Riduzione di un angolo all'orizzonte, trattata graficamente.** — La risoluzione grafica di questo problema non presenta veruna difficoltà. Si suppongano sempre conosciuti, l'angolo A che si vuol ridurre all'orizzonte, e gli angoli di pendenza dei due lati che lo comprendono. Sia MN (fig. 40) un'orizzontale, ed A' la proiezione del vertice A dell'angolo dato. Si scelga ad arbitrio un punto A della verticale innalzata in A', che rappresenterà il vertice predetto: ciò posto, se da A si conducono due rette che facciano con MN gli angoli di pendenza $AC'A'$, ABA', le rette AB ed AC' saranno i lati dell'angolo, e le distanze $A'C'$ ed $A'B$ rappresenteranno le lunghezze delle loro proiezioni orizzontali. Si prenda $A'B$ per uno dei lati dell'angolo orizzontale cercato, si tratta di trovare la direzione dell'altro lato.

Il lato che partendo da A incontra in C il piano orizzontale ad una distanza da A' uguale ad $A'C'$, ha l'estremità C sopra una circonferenza avente il centro in A' e per raggio $A'C'$; descritta adunque questa circonferenza, non si avrà più che da trovare la distanza del punto C dal punto B, la quale trovasi, e nel piano orizzontale e nel piano dell'angolo dato.

Sia BAD l'angolo dato, fatto centro in A e con un raggio AC', si descriva un arco che intersechi AD in D; BD sarà evidentemente la distanza del punto C al punto B. Dunque finalmente, fatto centro in B, e con un raggio uguale a BD, si tagli l'arco indefinito $C'C$ in C; tirando $A'C$, l'angolo CAC' sarà la riduzione all'orizzonte dell'angolo dato BAD.



LEZIONE DODICESIMA.

RIDUZIONE DI UN ANGOLO AL CENTRO DI STAZIONE.

(letta il 31 marzo 1834.)

Signori,

Sappiamo che se in un triangolo ABC (fig. 44) si son misurati due angoli A e B, ed è noto il lato AB, è sempre possibile calcolare gli altri due lati CA e CB, ed il terzo angolo C. Ma in una triangolazione alquanto estesa, come prima d'ora abbiamo osservato, onde accertarsi che non siasi commesso alcun errore sensibile nella misura dei due primi angoli, si misura anche il terzo.

Ora se si potrà far stazione in C, si otterrà immediatamente la misura dell'angolo che ha il suo vertice in questo punto; ma succede frequentemente che si è dai punti A e B osservata la croce di una cupola o qualche altro segnale al piede del quale non si può poi fare stazione; può anche accadere che nessuno dei vertici di un triangolo sia accessibile: in questi casi si cerca un sito O il più vicino che è possibile a quello in cui si dovrebbe far stazione, dal quale si possano comodamente scoprire i segnali posti in A, B e C; poscia si misura l'angolo O e si rilevano i dati necessari onde potere, col mezzo del calcolo, determinare l'angolo C.

Questo calcolo dicesi *riduzione dell'angolo osservato, al centro di stazione.*

99. **Riduzione di un angolo al centro di stazione.** — Sia O (fig. 41) il centro dello stromento, ossia il vertice dell'angolo osservato AOB, detto anche *angolo di posizione*, C il centro della stazione ovvero il vertice dell'angolo cercato ACB. Chiameremo S il lato di sinistra CA, e D quello di destra CB. Si misurano la distanza $OC=r$, e *l'angolo di direzione* $AOC=y$.

L'angolo OIC esterno ai due triangoli IBO ed AIC, è uguale, da una parte, alla somma dei due angoli interni $C+CAI$, e dall'altra alla somma dei due angoli interni $O+OBI$, e si avrà:

$$C-O=OBI-CAI.$$

I due triangoli CAO ed OBC danno le seguenti proporzioni:

$$r : sen\,OAC :: S : sen\,y,$$

$$r : sen\,OBC :: D : sen\,(O+y);$$

dalla prima proporzione si deduce:

$$sen\,OAC=\frac{r\,sen\,y}{S},$$

e dalla seconda:

$$sen\,OBC=\frac{r\,sen\,(O+y)}{D}.$$

Gli angoli OAC ed OBC essendo piccolissimi, si potrà ai seni di questi angoli sostituire gli archi corrispondenti, e si avrà:

$$OBC=\frac{r\,sen\,(O+y)}{D}, \qquad OAC=\frac{r\,sen\,y}{S}.$$

Portando questi due valori di OAC e di OBC nell'equazione che dà quello di $C-O$, si avrà finalmente la seguente formola, che fa conoscere la differenza fra l'angolo ridotto e l'angolo osservato:

$$C-O=\frac{r\,sen(O+y)}{D}-\frac{r\,sen\,y}{S}\ldots \qquad (1)$$

In questa equazione le quantità C ed O esprimono grandezze angolari che si possono facilmente ridurre in minuti secondi, mentre il secondo membro rappresenta le lunghezze assolute di due archi. Si tratta ora di convertire i due termini del secondo membro dell'equazione (1) in minuti secondi.

Possiamo considerare le lunghezze degli archi come esprimenti parti del raggio del circolo a cui appartengono. Chiamiamo adunque R questo raggio, e cerchiamo quanti gradi e parti di grado, o meglio quanti secondi abbracci sulla circonferenza un arco uguale in lunghezza al raggio.

Sia π il rapporto della semicirconferenza al raggio; si avrà:

$$\pi : 1 :: 180^\circ : R=\frac{180^\circ}{\pi}=\frac{180^\circ}{3,14159265535\ldots};$$

donde si deduce che l'arco uguale in lunghezza al raggio, comprende

$$57^\circ\,17'\,45''=3437'\,45''=206265''\,.$$

Ora essendo a lo sviluppo dell'arco dato, in parti del raggio, x questo stesso arco espresso in secondi ed $R=1$; è chiaro che si avrà:

$$1 : 206265'' :: a : x=a\times 206265''\,.$$

Da ciò risulta che *se un arco qualsivoglia è espresso in parti del raggio, si otterrà l'espressione di quest'arco in secondi moltiplicandolo pel numero di minuti secondi contenuti nell'arco uguale in lunghezza al raggio.*

È rimarchevole che v'ha con grandissima approssimazione $206265'' = \frac{1}{sen\ 1''}$: infatti si ha prossimamente $sen\ 1'' = arco\ 1''$, d'onde $\frac{1}{sen\ 1''} = \frac{1}{arco\ 1''}$; ma v'ha esattamente $\frac{1}{arco\ 1''} = 206265''$, poichè:

$$1 : 206265'' :: arco\ 1'' : 1'' ;$$

si può adunque supporre $\frac{1}{sen\ 1''} = 206265''$.

Moltiplicando pertanto i due termini del secondo membro dell'equazione (1) per $\frac{1}{sen\ 1''}$, essi diverranno della stessa natura dei due termini del primo membro, vale a dire che essi saranno due numeri contenenti tante unità quanti sono i secondi in ognuno dei due angoli OBC, OAC, e si avrà infine:

$$C - O = \frac{r\ sen\,(O+y)}{D\ sen\ 1''} - \frac{r\ sen\ y}{S\ sen\ 1''} \dots \qquad (2)$$

L'uso di questa formola semplicissima non può presentare difficoltà di sorta, è soltanto necessario di por mente ai segni dei due termini, i quali variano per la ragione che l'angolo y può acquistare tutti i valori compresi fra 0° e 360°. Così il primo termine rimane positivo finchè l'angolo $O+y$ è minore di 180° (§ 72), e diventa negativo quando que-

st'angolo è maggiore di $180°$; il secondo termine al contrario rimane negativo se l'angolo di direzione y è minore di $180°$, e diviene positivo quando quest'angolo è maggiore di $180°$.

Abbiamo fin qui supposto che nelle osservazioni si adoperasse un cerchio la cui graduazione costringesse a misurare gli angoli incominciando dall'oggetto di destra B (fig. 41), e si è perciò preso per angolo di direzione quello AOC compreso fra il lato AO, che trovasi alla sinistra dell'osservatore, ed il centro C della stazione, perchè in questo caso, dopo di aver misurato *l'angolo di posizione* $BOA=O$, si continua a muovere il cannocchiale finchè si scopra il punto C. Di tal maniera si viene a misurare, prima l'angolo di posizione O, poscia quello $O+y$, e si ottiene quindi l'angolo di direzione diffalcando il primo dal secondo.

Risulta da ciò che quando l'angolo fatto dal lato di destra col raggio di direzione r fosse minore di quello di posizione O, ciò che ha luogo quando si fa stazione in un punto collocato fra i prolungamenti dei due lati BC ed AC (come si scorge nella fig. 42, in cui l'angolo $BO''C<BOA$), si misurerebbe da prima l'angolo minore, e seguitando poscia a far girare il cannocchiale si prenderebbe l'angolo di posizione. Ora se si vuol continuare, anche in questo caso, a chiamare $O+y$ l'angolo $BO''C$ (fig. 42), essendo $BO''C<AOB$, si avrà $O+y<O$, ed $y<zero$: si dovrà adunque in tale circostanza considerare y come negativo. Si potrebbe anche fare $O+y=360°+BO''C$, ed allora y sarebbe evidentemente più grande di $180°$.

Si supponga $O+y<O$ od $=360°+BO''C$, i due termini dell'equazione (2) saranno sempre, in questo caso particolare, entrambi positivi. Di fatto il seno di $O+y<180°$

è positivo; dunque il primo termine dell'equazione è positivo: il seno di $y < zero$ o $> 180°$ è negativo; dunque il secondo termine dell'equazione è positivo.

Se si fa stazione in O''' nell'interno dell'angolo ACB, è chiaro che $O+y > 180°$, ed $y < 180°$; dunque in questo caso i due termini $\frac{r \, sen\,(O+y)}{D \, sen \, 1''}$ e $-\frac{r \, sen \, y}{S \, sen \, 1''}$ sono tutti e due negativi.

Se le osservazioni si fanno in un punto O' posto alla sinistra del centro C, $O+y$ ed y saranno entrambi maggiori di $180°$, ed il primo dei predetti due termini sarà negativo e l'altro positivo.

Se poi lo stromento è collocato in O alla destra di C, che è il caso da noi supposto da bel principio, i due termini conservano i loro rispettivi segni dati dall'equazione stessa.

Se si impiegasse uno stromento la cui graduazione procedesse in ordine contrario a quello che si è da noi supposto, converrebbe cambiare nella formola (2), D in S, e viceversa S in D; perchè allora la misura degli angoli di posizione incomincierebbe dal lato di sinistra, e si avrebbe:

$$C-O=\frac{r \, sen\,(O+y)}{S \, sen \, 1''}-\frac{r \, sen \, y}{D \, sen \, 1''}.$$

Ciò si può facilmente riconoscere cercando di dedurre quest'equazione supponendo lo stromento nella posizione O' e chiamando y l'angolo $BO'C$.

In alcuni casi particolari l'equazione (2) può ridursi ad una forma più semplice. Ciò succede allorchè uno degli oggetti si può considerare come posto ad una distanza infinitamente grande rispetto ad r, per esempio, se A fosse una

stella, S diventando infinito, il secondo termine svanirebbe e si avrebbe:

$$C - O = \frac{r \, sen\,(O + y)}{D \, sen \, 1''}.$$

Si otterrebbe lo stesso risultato se si facesse stazione in O (fig. 43) sulla linea AC che unisce il punto A al centro, perchè in tal caso si avrebbe

$$y = 180^\circ \qquad \text{e} \quad sen\, y = 0 .$$

Se ciò che si è supposto per A si suppone per B, ne risulterà:

$$C - O = -\frac{r \, sen\, y}{S \, sen \, 1''}, \qquad \text{ossia} \quad O - C = \frac{r \, sen\, y}{S \, sen\, 1''}.$$

Lo stesso accadrebbe se la stazione avesse luogo in O' (fig. 43) sul lato BC del triangolo ABC, per essere allora $O + y = 180^\circ$.

Se gli oggetti osservati fossero due astri, si troverebbe:

$$C - O = 0, \qquad \text{ossia} \quad C = O .$$

Si otterrebbe lo stesso risultato se uno dei due punti osservati A, o B, essendo un astro e l'altro un oggetto terrestre, si facessero le osservazioni sulla linea che unisce l'oggetto terrestre al centro di stazione.

V'ha un altro caso in cui non occorre di fare alcuna correzione, ed è quando i due termini del secondo membro dell'equazione (2) sono uguali; ma allora:

$$\frac{sen\, y}{sen\,(O + y)} = \frac{S}{D}.$$

Ora dal triangolo ABC si deduce la proporzione

$$\text{sen}\, B : \text{sen}\, A :: S : D\,,$$

nella quale invece di $\text{sen}\, A$ sostituendo $\text{sen}\,(B + C)$, si avrà:

$$\text{sen}\, B : \text{sen}\,(B + C) :: S : D\,;$$

ossia

$$\frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\,(B + C)} = \frac{S}{D}\,;$$

donde ne segue:

$$\frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\,(B + C)} = \frac{\text{sen}\, y}{\text{sen}\,(O + y)}\,,$$

e sviluppando i denominatori:

$$\frac{\text{sen}\, B}{\text{sen}\, B \cos C + \text{sen}\, C \cos B} = \frac{\text{sen}\, y}{\text{sen}\, O \cos y + \text{sen}\, y \cos O}\,;$$

dividendo poscia il numeratore ed il denominatore del primo membro per $\text{sen}\, B$, il numeratore ed il denominatore del secondo membro per $\text{sen}\, y$, si avrà:

$$\frac{1}{\cos C + \text{sen}\, C \cot B} = \frac{1}{\cos O + \text{sen}\, O \cot y}\,,$$

ed essendo $O = C$ d'ipotesi, si otterrà finalmente:

$$\text{tang}\, y = \text{tang}\, B = \text{tang}\,(180° + B)\,.$$

L'angolo ridotto è adunque uguale all'angolo osservato, ogniqualvolta il vertice di questo si trovi sulla circonferenza circoscritta al triangolo ABC (fig. 44) in O od in O'.

È quasi impossibile determinare sul terreno i punti appartenenti a questa circonferenza; ma non è difficile lo stabilirsi sulla tangente condotta pel punto C alla stessa circonferenza, e *Delambre* ha dimostrato che facendo stazione

su questa tangente, il più che si possa vicino al punto C, ed anche a qualche metro di distanza da questo punto, si può, senza errore sensibile, trascurare la riduzione al centro. L'uso dell'equazione (2) essendo però facilissimo, sarebbe per noi di poca utilità lo occuparci del modo di determinare la direzione di tale linea.

La distanza $r = OC$ si deve misurare sul terreno colla massima precisione, i lati D ed S si misurano sopra un abbozzo della triangolazione eseguita ad una scala abbastanza grande, e su cui gli angoli costrutti col rapportatore grafico rappresentano quelli di posizione: oppure si calcolano provvisoriamente, considerando gli angoli osservati come se fossero digià ridotti, ciò che è sufficientemente esatto. Non è necessario di ripetere l'angolo y.

100. **Esempio numerico della riduzione al centro.**

Dati $O = 52^\circ\ 17'\ 0''$ $\quad D = 1270^m$

$O + y = 75.\ 37.\ 0$ $\quad S = 1350$

$y = 23.\ 20.\ 0.$ $\quad r = 1^m,15$

$$C - O = \frac{r\ sen\,(O+y)}{D\ sen\ 1''} - \frac{r\ sen\ y}{S\ sen\ 1''}$$

Calcolo del 1.° termine.

$log\ r = log\ 1,15 = 0,061$

$l.sen(O+y) = l.s.75^\circ 37' = 9,986 = log\ cos\ 14^\circ 23$

$compl.\ l.\ D = c.\ l.\ 1270 = 6,896$

$c.\ l.\ s.\ 1'' = \ldots\ldots = 5,314$

$2,257 = log\,181$

Calcolo del 2.° termine.

$$\log r = \ldots\ldots\ldots = 0,061$$
$$l.\ sen\ y = l.\ s.\ 23^\circ 20' = 9,598$$
$$compl.\ l.\ S = c.\ l.\ 1350 = 6,870$$
$$c.\ l.\ s.\ 1'' = \ldots\ldots\ldots = 5,314$$
$$\overline{1,843} = \log 70$$

$$C - O = 181'' - 70'' = 111'' = 1'51'',$$
$$C = O + 1'51'' = 52^\circ 18' 51''.$$

Finchè il rapporto fra la distanza r ed i lati S e D non è maggiore di 0,001; ossia finchè v'ha $\frac{r}{S}$ e $\frac{r}{D} < \frac{1}{1000}$, si potranno eseguire questi calcoli con molta celerità impiegando i logaritmi con sole tre decimali, come ora abbiam fatto, perchè nelle espressioni $\frac{sen(O+y)}{sen\,1''}$, $\frac{sen\,y}{sen\,1''}$, i numeratori non essendo mai maggiori di 1, ed il denominatore comune essendo uguale a 0,000005 circa, nessuno dei due termini potrà essere maggiore di $\frac{0,001}{0,000005} = 200$, ed i logaritmi de' numeri fino a quello di 455 differiscono tutti nella terza cifra decimale.

Se si fa un giro d'orizzonte da una sola stazione fuori del centro, la somma delle correzioni è uguale a zero. Di fatto dette d, d', d'', ecc., queste correzioni, v'ha $C-O=d$, $C'-O'=d'$, $C''-O''=d''$, ecc., e $C+C'+C''\ldots - (O+O'+O''+\ldots) = d+d'+d''+\ldots$ Ma $C+C'+C''+\ldots = 360^\circ$; $O+O'+O''\ldots = 360^\circ$. Dunque $d+d'+d''+\ldots = 0$.

101. **Centro invisibile ed inaccessibile.** — Quando il centro di stazione è sull'asse d'una torre o d'un campanile, e che il vertice di posizione è accanto a quest'oggetto, accade per lo più che il centro non è visibile, ed è inaccessibile. Se si fa stazione in O (fig. 45), e che il centro di stazione sia quello di una torre circolare, si condurranno le tangenti OT, OT', sulle quali si prenderanno due parti uguali Op, Oq, in modo che la retta che unisce i due punti p e q sia il più che si possa prossima alla torre; si segnerà il punto di mezzo m di questa retta, ed Om sarà evidentemente nella direzione del centro C. Si misurerà poscia l'angolo $COA=y$, ed alla distanza Oz si aggiugnerà il raggio Cz per avere $CO=r$.

Se non si potesse misurare direttamente il raggio o la circonferenza della torre per qualche ostacolo che non permettesse di attorniarla, si misurerebbe una delle due tangenti, per esempio OT, e si avrebbe

$$Oz'=\frac{\overline{OT}^2}{Oz}\,,\quad \text{ed}\quad OC=\frac{Oz+Oz'}{2}\,.$$

Si noti che l'angolo $COA=y$ è anche uguale a $\frac{T'OA+TOA}{2}$; laonde si può dedurre l'angolo di direzione dalla semisomma degli angoli fatti dalle due tangenti OT ed OT' col lato di sinistra.

Se la torre $PQRS$ (fig. 46) fosse rettangolare, e che dalla posizione O si potessero vedere le estremità P ed R di una delle sue diagonali, si misurerebbero i due lati OP ed OR del triangolo OPR, quindi dividendo in parti proporzionali questi due lati, ad esempio, per metà, la retta che unirebbe i due punti di mezzo p ed r, di questi due lati, sarebbe parallela a PR, e la visuale condotta pel punto m, che divide pr in due parti uguali, passerebbe evidentemente pel

centro C. Si otterrebbe infine la distanza OC colla proporzione:

$$Op : OP :: Om : OC .$$

Se non fosse possibile di far stazione in un sito da cui si potessero scorgere i due estremi di una diagonale, si potrebbe abbassare una perpendicolare Op (fig. 47) sul prolungamento di uno de' lati PQ del rettangolo $PQRS$, e misurando poscia esattamente Op e la distanza pm compresa fra il piede della perpendicolare e il punto di mezzo m del lato prolungato, per essere $Cm = \frac{RQ}{2}$, si troverebbe il punto c colla seguente proporzione:

$$Cm : Op :: cm : pc ;$$

o componendo: $Cm + Op : Cm :: pm : cm$.

Trovato il punto c sarebbe conosciuta la direzione di OC, e si avrebbe:

$$OC = Oc + cC .$$

Ora Oc si può misurare direttamente,

e $$cC = \sqrt{mc^2 + Cm^2} .$$

Non potendosi abbassare la perpendicolare Op, se ne innalzerebbe una in un punto p (fig. 48), più vicino ad m, e segnata sul terreno l'intersecazione d di questa perpendicolare colla Om, si troverebbe il punto c posto sulla direzione OC, colla proporzione:

$$Om : Od :: Cm : dc .$$

Trovato il punto c si determinerebbe la distanza OC come precedentemente.

Questi due ultimi metodi sono evidentemente applicabili a tutti i poligoni regolari.



LEZIONE TREDICESIMA.

CALCOLO DELLE DISTANZE DALLA MERIDIANA E DALLA SUA PERPENDICOLARE. DETERMINAZIONE DI DISTANZE INACCESSIBILI.

(letta il 7 aprile 1851.)

SIGNORI,

In una delle prossime lezioni vedremo come si determini la meridiana di un luogo, e come si misuri l'angolo fatto dal lato di un triangolo colla meridiana che passa per uno de' suoi estremi; angolo che vien chiamato *l'azimuto* del lato. Supponendo intanto conosciuto l'azimuto del lato di un triangolo appartenente ad una rete trigonometrica, occupiamoci della determinazione delle distanze di tutti i punti della rete alla meridiana di uno di essi, ed alla sua perpendicolare.

102. **Calcolo delle distanze dei punti di una rete trigonometrica dalla meridiana di uno di essi e dalla sua perpendicolare.** — Sia in primo luogo un triangolo ABC (fig. 49) del quale si conoscono i tre angoli A, B, C e i tre lati a, b, c. Sia AX la meridiana che passa pel punto A, AY la sua perpendicolare. Si tratta di calcolare le distanze BP, CP' e BQ, CQ', dei vertici B e C del triangolo, essendo noto l'angolo $BAX = z$, o l'azimuto del lato AB.

Chiamiamo x le distanze $BQ=AP$, $CQ'=AP'$ dalla perpendicolare, ed y le distanze $BP=AQ$, $CP'=AQ'$ dalla meridiana.

Nel triangolo rettangolo BAP, si ha (1.° caso dei triangoli rettangoli § 82) per le distanze del punto B:

$$AP=AB\cos PAB\,, \qquad BP=AB\,\text{sen}\,PAB\,;$$

ossia
$$x=c\cos z\,, \qquad y=c\,\text{sen}\,z\,.$$

Nel triangolo $P'AC$ v'ha:

$$\text{angolo } CAP'=A+z=z'\,,$$

e per le distanze del punto C:

$$AP'=AC\cos CAP'\,, \qquad CP'=AC\,\text{sen}\,CAP'\,,$$

ossia
$$x=b\cos z'\,, \qquad y=b\,\text{sen}\,z'\,.$$

Le distanze dei punti dalla meridiana si chiamano *le ordinate*, quelle dalla perpendicolare si dicono le *ascisse*; donde le denominazioni di *asse delle ascisse* e di *asse delle ordinate* date alla meridiana ed alla sua perpendicolare. Il punto A dicesi l'origine delle *coordinate*, l'angolo $BAX=z$ è l'azimuto del lato AB, e l'angolo $CAX=A+z=z'$ è l'azimuto del lato AC.

La meridiana del punto principale e la sua perpendicolare dividono tutto un territorio in quattro grandi regioni che si potrebbero chiamare, dalla loro situazione rispetto ai due assi: quella YAX' (fig. 50), *regione del nord-ovest*; quella $X'AY'$; *regione del nord-est*; quella $Y'AX$, *del sud-est*; e quella YAX, *regione del sud-ovest*. Di maniera che per dare un'idea ben netta della situazione di un punto, a chi non avesse il piano sotto gli occhi, alle sue distanze dalla meridiana e dalla perpendicolare, converrebbe aggiugnere

in quale delle quattro regioni esso si trovi; ciò che non tralascierebbe di essere alquanto imbarazzante.

A togliere simile inconveniente si è stabilito di far precedere ciascun numero indicante le predette distanze, da uno de' due segni $+$ o $-$, secondo l'angolo in cui trovasi il punto considerato. Così chiamando come precedentemente x ed y le coordinate di un punto M, se il punto è compreso nell'angolo YAX, si avrà $(+x, +y)$; se è collocato nell'angolo YAX', sarà $(-x, +y)$; se trovasi nell'angolo $Y'AX'$, si ha $(-x, -y)$; finalmente se è nell'angolo $Y'AX$, v'ha $(+x, -y)$.

Acciocchè i segni $+$ e $-$ che si pongono davanti alle distanze dalla meridiana e dalla perpendicolare dipendano dal calcolo medesimo, si è convenuto di contare gli azimuti dei lati che concorrono in uno stesso punto A, partendo dalla parte sud della meridiana, ove si suppone posto il zero della graduazione, procedendo dal sud all'ovest.

Mediante la misura diretta dell'azimuto di un solo lato si deducono gli azimuti di tutti gli altri lati della triangolazione di un territorio, come segue:

Sia in secondo luogo A (fig. 50) l'origine delle coordinate di una rete trigonometrica: supponiamo conosciuto l'azimuto Z del lato AM, e chiamiamo per brevità K, K', K'' ecc., i lati AM, AM', AM'', ecc., x le ascisse, ed y le ordinate dei punti M, M', M'' ecc.

Essendo l'azimuto Z maggiore di $180°$, si faccia $Z = 180° + z$; si avrà $\cos Z = -\cos z$ (§ 72), $\text{sen}\, Z = -\text{sen}\, z$, e le coordinate del punto M saranno:

$$x = K \cos Z = -K \cos z\ ,$$

$$y = K\, \text{sen}\, Z = -K\, \text{sen}\, z\ .$$

L'azimuto del punto M' sarà

$$Z' = Z - MAM' = 180^\circ + X'AM' = 180^\circ + z',$$

e le coordinate:

$$x = K' \cos Z' = -K' \cos z',$$

$$y = K' \operatorname{sen} Z' = -K' \operatorname{sen} z'.$$

L'azimuto del punto M'' sarà

$$Z'' = Z' - M'AM'' = 90^\circ + YAM'' = 90^\circ + z'';$$

d'onde:
$$x = K'' \cos Z'' = -K'' \operatorname{sen} z''$$

$$y = K'' \operatorname{sen} Z'' = +K'' \cos z''.$$

Per il punto M''' si avrà $Z''' = Z'' - M''AM'''$, e quindi:

$$x = +K''' \cos Z'''$$

$$y = +K''' \operatorname{sen} Z'''.$$

Pel punto M^{iv} si avrà $Z^{\text{iv}} = Z''' - M'''AM^{\text{iv}}$, ed essendo $M'''AM^{\text{iv}} > Z'''$, la differenza, che chiameremo z^{iv}, sarà negativa, onde si avrà:

$$x = +K^{\text{iv}} \cos z^{\text{iv}},$$

$$y = -K^{\text{iv}} \operatorname{sen} z^{\text{iv}}.$$

L'azimuto Z^{iv} si può anche ottenere aggiugnendo a Z la somma dei due angoli $MAM^{\text{v}} + M^{\text{v}}AM^{\text{iv}}$, e facendo quindi $z^{\text{iv}} = Z^{\text{iv}} - 360^\circ$ si otterrebbero le coordinate del punto M^{iv} come precedentemente.

Abbiasi in terzo luogo la rete rappresentata dalla fig. 51, nella quale l'azimuto del lato $AB = XAB = Z = 90^\circ + z$.

Chiameremo X ed Y le ascisse e le ordinate di ciascun punto, riferite all'origine A.

Si calcoleranno prima d'ogni cosa le coordinate del punto B, e si troverà:

$$Ab=X=-AB \operatorname{sen} z\,, \quad Bb=Y=+AB\cos z\,.$$

Poscia pel punto C si trova:

$$XAC=Z'=Z-BAC\,, \text{ azimuto del lato } AC\,;$$

$$Ac=X=+AC\cos Z'\,, \quad cC=Y=+AC \operatorname{sen} Z'\,.$$

Pel punto D v'ha:

$$Z''=Z'-CAD=-XAD=-z'\,;$$

$$Ad=X=+AD\cos z'\,, \quad Dd=Y=-AD \operatorname{sen} z'\,.$$

Dall'azimuto del lato BC si deduce quello del lato CE. A quest'uopo se immaginiamo pel punto C una parallela $c'X'$ alla meridiana AX, si avrà $BCc'=BCA-c'CA$; ma $c'CA=CAX=Z'$, e perciò $BCc'=BCA-Z'$. Conosciuto l'angolo BCc' si troverà l'angolo $c'CE=c'CB+BCE$, e finalmente $X'CE=Z''=180°-c'CE$, azimuto del lato CE.

Si ha quindi per le coordinate del punto E:

$$X=Ee'=pC+Cc'=pC+cA\,;$$

$$Y=Ee=Ep+pe=Ep+Cc\,.$$

Ma $\quad pC=CE\cos Z''\,, \quad Ep=CE \operatorname{sen} Z''\,;$

dunque finalmente:

$$X=CE\cos Z''+AC\cos Z'\,,$$

$$Y=CE \operatorname{sen} Z''+AC \operatorname{sen} Z'\,.$$

Dall'azimuto del lato CE si dedurrebbe quello del lato CK, come dall'azimuto del lato AC si è dedotto quello del lato AD, e quindi si calcolerebbero le coordinate del punto K;

$$X = Cq + Cc' = Cq + Ac\,,$$
$$Y = qk - qK = Cc - qK\,.$$

Se all'angolo $CEe' = ECX' = Z''$ si aggiugne $180°$, si avrà l'azimuto del lato CE rispetto alla meridiana del punto E; da quest'ultimo azimuto togliendo l'angolo CEF si avrà l'azimuto del lato EF, $X''EF = Z'''$; poscia si troverà:

$$X = rE + Cp + cA = EF\cos Z''' + CE\cos Z'' + AC\cos Z'\,,$$
$$Y = Fr + Ep + Cc = EF\operatorname{sen} Z''' + CE\operatorname{sen} Z'' + AC\operatorname{sen} Z'\,.$$

Continuando questa serie di calcoli si perverrebbe a trovare le coordinate dei rimanenti punti G, H, I ecc., della rete trigonometrica.

103. Costruzione del piano trigonometrico. — La costruzione del piano trigonometrico, dopo di aver calcolate le distanze dalla meridiana del punto principale e dalla perpendicolare, di tutti i punti trigonometrici che deve contenere, non presenta alcuna difficoltà. Dopo di aver diviso il foglio sul quale si deve costrurre il piano in tanti quadrati uguali, i cui lati siano un sottomultiplo esatto del metro, per esempio, un decimetro od un mezzo decimetro, si prende per origine delle coordinate il vertice di uno di tali quadrati; i due lati che colla loro reciproca intersecazione determinano questo vertice, prolungati per tutta l'estensione del foglio, rappresentano sul piano la meridiana e la sua perpendicolare, ed i lati degli altri quadrati saranno tante parallele agli assi

ortogonali che renderanno più facile il collocamento dei punti nel loro rispettivo sito.

Sia, per semplice dimostrazione, MN (fig. 52) il foglio del disegno, che supporremo debba costrursi alla scala di 1 a 10000, siano le dimensioni reali del disegno, $PQ = 0^m,70$; $QR = 0^m,50$.

Il calcolo avendo dato per le coordinate dei punti trigonometrici i seguenti risultati:

$B \ldots x = -750^m, \quad y = -1920^m;$

$C \ldots x = +1250, \quad y = -2870;$

$D \ldots x = -1120, \quad y = -3730;$

$E \ldots x = +2300, \quad y = -860;$

$F \ldots x = +1930, \quad y = +1940;$

$G \ldots x = -1630, \quad y = +1500;$

si dovrà nella costruzione del piano procedere nel seguente modo:

Rappresentando il lato d'ogni quadrato la lunghezza di 1000^m, per collocare il punto B, a partire dall'intersecazione 1 sulla perpendicolare alla meridiana, e alla destra di A, si porti un'apertura di compasso $(1,b') = 920^m$, e sulla parallela alla meridiana si porti, a partire dalla medesima intersecazione, un'apertura $(1,b) = 750^m$; poscia fatto centro in b' ed in b, e con raggi rispettivamente uguali a $(1,b)$ e $(1,b')$, si descrivano due archi: questi archi intersecandosi determineranno la situazione del punto B.

In modo analogo si collocheranno gli altri punti C, D, ecc.

Se il piano non potesse tutto contenersi in un solo foglio, si preparerebbe un numero sufficiente di fogli rettangoli, tutti uguali e divisi in piccoli quadrati nel modo suindicato,

poscia scegliendo per origine delle coordinate il vertice di uno dei quattro angoli di un foglio, di quell'angolo cioè che la distribuzione dei punti sul terreno fa riconoscere per il più opportuno, si opererebbe su ciascun foglio, e su ogni rettangolo di un foglio, come si è precedentemente indicato.

104. **Moduli di registrazione delle operazioni e dei calcoli trigonometrici.** — Per la conservazione dei dati rilevati sul terreno e dei calcoli eseguiti onde determinare la posizione dei singoli punti trigonometrici scelti nel territorio, per rendere questi calcoli di più facile esecuzione e verificazione, ed anche per poter più facilmente ritrovare i punti sopradetti ogniqualvolta se ne facesse ricerca, si devono inscrivere sì gli uni che gli altri in appositi registri.

Per porgere un'idea esatta di tutto ciò che è relativo alla triangolazione del territorio di un comune, uniamo alla presente lezione i moduli dei registri indispensabili in simili operazioni, facendoli precedere dalla descrizione d'ognuno di essi.

I dati inscritti in questi registri si riferiscono alla triangolazione delineata a fig. 53, alla scala di 1 a 15000: questa figura contiene la lunghezza di tutti i lati e l'ampiezza di tutti gli angoli, perchè non tutti possono capire nei saggi di registrazione da noi presentati; questa figura contiene pur anche l'azimuto della base, e le direzioni della meridiana e della perpendicolare.

Modulo A.

Registro di campagna.

Nella prima colonna la lettera *O* indica il punto del terreno sul quale si fa stazione: nella seconda colonna le lettere *D* ed *S* indicano, una il punto che trovasi alla destra, l'altra quello che è alla sinistra dell'osservatore; cosicchè passando da un angolo all'altro, il punto che prima era *S* diviene *D*, e terminato il giro d'orizzonte, il primo punto *D* diviene l'ultimo *S* della stazione, o viceversa, secondo l'ordine delle osservazioni. Scrivendo dopo le lettere *O*, *D* ed *S* i numeri d'ordine dei relativi punti trigonometrici, e tutte quelle indicazioni che meglio possono individuarli, si toglie ogni dubbio sugli angoli che si vanno osservando.

Nella terza colonna le abbreviazioni $2A$, $3A$, ecc., significano *doppio angolo*, *triplo angolo*, ecc. Ad ogni osservazione si deve dedurre l'angolo semplice e notarlo nella colonna quarta accanto al rispettivo multiplo, onde vedere se la serie cammina a dovere.

Le lettere poste nell'ultima colonna corrispondono alle seguenti quantità: *r* distanza dal centro dello stromento al centro della stazione; *y* angolo di direzione; $O+y$ angolo di posizione aumentato dell'angolo di direzione. Quest'angolo è quello che si misura sul terreno: da $O+y$ togliendo *O*, che si è pure misurato, rimane l'angolo *y*.

Modulo B.

Riduzione degli angoli al centro di stazione.

Le lettere *O*, *D*, *S* corrispondono a quelle del registro di campagna; *C* è l'angolo al centro.

La formola non dà direttamente l'angolo cercato C, ma solo la differenza $C-O$: questa differenza può riuscire positiva o negativa.

Nel primo caso si avrà $C=O+(C-O)$, nel secondo caso sarà $C=O-(C-O)$.

Dalla grandezza dei due angoli $O+y$ ed y dipende il segno di ciascun termine della formola, e quindi quello della differenza cercata $C-O$.

Se nel giro d'orizzonte si son fatte tutte le osservazioni da una sola stazione, si troverà nel calcolo di ciascun angolo, che il risultato d'ogni secondo termine della formola è uguale a quello del primo termine del calcolo dell'angolo precedente, e che il risultato del primo termine dell'ultimo angolo è uguale a quello del secondo termine del primo angolo: perciò, essendo cinque gli angoli osservati, s'impiegherà solo quattro volte la formola; s'adoprerà cinque volte se gli angoli sono sei, ecc.

I dati inscritti in questo modulo corrispondono a quelli della fig. 54 che rappresenta il giro d'orizzonte fatto accanto al punto trigonometrico n.° 7 della fig. 53.

Modulo C.

Calcolo dei lati.

Nella prima colonna dopo la lettera O si scrive il numero d'ordine del punto trigonometrico che trovasi al vertice dell'angolo opposto al lato DS, conosciuto nel triangolo che si considera. Dopo le lettere D ed S si scrivono i numeri corrispondenti ai punti posti alle estremità, a destra ed a sinistra, del lato predetto, supponendo che si guardi questo lato stando in O.

La seconda colonna è divisa in due parti intitolate *angoli dati*, *angoli corretti*; la prima parte serve all'inscrizione degli angoli misurati sul terreno e ridotti al centro, e la seconda a quella degli stessi angoli, resi tali, che la somma dei tre d'ogni triangolo sia esattamente uguale a due retti.

L'ultima colonna è pure divisa in due parti; nella prima si notano le lunghezze dei lati dati, che, relativamente ad ogni triangolo, si dicono basi, coll'indicazione di base principale o di base di controllo, secondo i casi. Se trattasi d'una base già stata misurata si dovrà indicare la lunghezza trovata colla misura diretta e quella dedotta col calcolo.

Modulo D.

Calcolo degli angoli.

Questo modulo serve all'inscrizione dei dati e dei calcoli relativi alla risoluzione del terzo caso de' triangoli obbliquangoli.

Nella prima parte della seconda colonna si scrive l'angolo conosciuto in ciascun triangolo e la somma degli altri due; la seconda parte deve contenere gli angoli dedotti mediante le due formole poste in capo della terza colonna.

Le due formole predette danno la tangente della semidifferenza dei due angoli cercati, e poichè già si conosce la loro semisomma, si ottiene l'angolo maggiore mediante addizione, e l'angolo minore mediante sottrazione di queste ultime quantità, come scorgesi dalla seconda parte della colonna terza. Le lettere *d* ed *s* sono le abbreviazioni di *differenza* e di *somma* dei lati.

Nell'ultima colonna si inscrivono finalmente i due lati conosciuti, la loro somma e la loro differenza; dati questi che entrano nel calcolo.

Di questo modulo si fa raramente uso. Esso deve formare col precedente un solo registro sotto il titolo di *calcolo dei triangoli.*

MODULO E.

Calcolo delle distanze dalla meridiana scelta nel comune e dalla sua perpendicolare.

Le indicazioni del punto preso per origine delle coordinate si descrivono in capo al registro.

La prima colonna contiene il numero e la descrizione di ciascun punto trigonometrico.

Nella seconda colonna si indica:

1.° La direzione e la lunghezza di uno dei lati sui quali trovasi il punto di cui si cercano le coordinate. Questo lato non si può prendere ad arbitrio fra tutti quelli che concorrono nello stesso punto, ma devesi scegliere quello che unisce il punto considerato ad un altro le cui coordinate già vennero calcolate. Questo lato è nella formola distinto colla lettera *K*. La direzione di un lato è indicata dall'ordine con cui si scrivono i suoi estremi, per esempio, (1,2) e (2,1) denotano le due direzioni dello stesso lato, una in senso contrario dell'altra:

2.° L'azimuto z già conosciuto di uno dei lati che concorrono all'altra estremità del lato *K* sovraindicato:

3.° Le coordinate y ed x di quest'estremo, espresse in metri e col loro rispettivo segno.

La formola $Z = y \pm O$ della terza colonna, indica che l'azimuto del lato *K* si ottiene aggiugnendo o togliendo dall'angolo z, quello compreso fra lo stesso lato *K* ed il lato che ha z per azimuto.

La colonna quarta contiene il calcolo della distanza y' dalla meridiana che si suppone condotta per l'altro estremo del lato K.

La formola $Y = y + y'$ della quinta colonna, indica che si ottiene la distanza dalla meridiana del punto principale, sommando le due ordinate y ed y' considerate col loro rispettivo segno.

Le colonne sesta e settima contengono le formole ed i calcoli per ottenere le distanze dalla perpendicolare.

La figura 58 è la riproduzione del piano trigonometrico della figura 53, costrutta mediante le coordinate de' singoli punti (§ 103). La scala di questo nuovo piano è di 1 a 12000, i lati de' quadrati hanno la lunghezza reale di 25 millimetri e rappresentano perciò 300^m.

105. **Determinazione di distanze inaccessibili.** — *Trovare la lunghezza della retta che unisce i due punti* A *e* B (fig. 55), *essendo questa linea accessibile soltanto ne' suoi estremi.*

Si scelga un punto C del terreno dal quale si scoprano i due punti A e B, ed in un sito tale che sia facile misurare le distanze CA e CB.

Si possono presentare tre casi:

1.° Si può far stazione nei tre vertici del triangolo ABC:

2.° Si può far stazione in C e in uno dei due estremi A e B.

3.° Si può soltanto far stazione nel punto C.

I primi due casi si riducono ad un solo; l'unica differenza sta in ciò, che potendosi misurare i tre angoli si ha un mezzo di verificazione.

Misurati i tre angoli, o soltanto i due angoli C ed A, si troverà la lunghezza di AB colla proporzione del primo

caso dei triangoli obbliquangoli:

$$sen A : sen C :: BC : AB = \frac{sen C}{sen A} \times BC.$$

Altrimenti si ricorrerà alla proporzione del terzo caso de' triangoli obbliquangoli, mediante la quale si troverà la differenza fra i due angoli A e B, che combinata colla somma $A+B=180^\circ-C$, farà conoscere i due angoli A e B. Conosciuti i tre angoli si troverà AB come precedentemente.

II. *Trovare la distanza* AB (fig. 56) *accessibile soltanto in un suo estremo* B.

Si faccia stazione in un punto da cui si vedano A e B, e si possa andare direttamente in B. Misurati gli angoli C e B, si dedurrà il terzo angolo A del triangolo ABC, e quindi si troverà:

$$AB = \frac{sen C}{sen A} \times BC.$$

Se non si potesse porre lo strómento in B, si trasporterebbe in un punto D sul prolungamento di AB, e dopo di aver calcolata la distanza AD, si avrebbe evidentemente,

$$AB = AD - DB.$$

III. *Trovare la distanza* AB (fig. 57) *interamente inaccessibile.*

Si scelgano sul terreno due punti C e D, colle condizioni che stando in uno di essi si possa veder l'altro, che da ciascuno si scoprano i due estremi A e B della distanza cercata, e che si possa misurare la distanza CD che li separa.

Si misuri CD e gli angoli ACB, ACD, ADC e CDB; si dedurranno $BCD=ACD-ACB$, $ADB=BDC-ADC$, $CAD=180^\circ-(ACD+ADC)$ e $CBD=180^\circ-(BCD+CDB)$.

Nel triangolo ADC si avrà:

$$sen\,DAC : sen\,ADC :: CD : AC = \frac{sen\,ADC}{sen\,DAC} \times CD\ ;$$

nel triangolo BCD, sarà:

$$sen\,DBC : sen\,CDB :: CD : BC = \frac{sen\,CDB}{sen\,DBC} \times CD\ .$$

Trovati i due lati AC e CB si calcoleranno i due angoli CAB ed ABC del triangolo BCA, colla proporzione del terzo caso dei triangoli obbliquangoli.

$$CB+AC : CB-AC :: cot\,\frac{1}{2}ACB : tang\,\frac{1}{2}(CAB-ABC).$$

Conosciuti finalmente i tre angoli del triangolo ABC si troverà,

$$AB = \frac{sen\,ACB}{sen\,ABC} \times AC$$

$$= \frac{sen\,ACB}{sen\,BAC} \times BC\ .$$

TRIANGOLAZIONE

Registro di Campagna.

DESCRIZIONE dei Punti Trigonometrici di Stazione	DESCRIZIONE dei Punti Trigonometrici di Mira	ANGOLI		DATI per la riduzione al centro della Stazione
		multipli	semplici	
O. 1. *Estremità Sud-Ovest della base principale.*	D. 2 *Estremità Nord-Est della base principale.*	A	51° 59′ 0″	
		2A. 103° 59′	51. 59. 30	r =
		3A. 155. 59	51. 59. 40	O + y =
	S. 14. *Segnale sulla cima del*	4A. 207. 59	51. 59. 45	y =
		5A. 260. 0	52. 0. 0	
O 1. *Come sopra.*	D. 14. *Segnale sulla cima del*	A		
		2A		r =
		3A		O + y =
	S. 12. *Segnale nel giardino di*	4A		y =
		5A	42° 40′	
O. 1. *Come sopra.*	D. 12. *Segnale nel giardino di*	A		
		2A		r =
		3A		O + y =
	S. 10. *Segnale a*	4A		y =

O. 1. *Come sopra.*	D. 10. *Segnale a* .... S. 9. *Segnale sulla torre del telegrafo.*	A 2A 3A 4A 5A	62° 30′	r = O + y = y =
O. 1. *Come sopra.*	D. 9. *Segnale sulla torre del telegrafo.* S. 7. *Croce del pilone di S. A.*	A 2A 3A 4A 5A	50° 20′	r = O + y = y =
O. 1. *Come sopra.*	D. 7. *Croce del pilone di* ..... S. 5. *Segnale a*	A 2A 3A 4A 5A	47° 40′	r = O + y = y =
O. 1. *Come sopra.*	D. 5. *Segnale a* .... S. 2. *Estremità Nord-Est della base principale.*	A 2A 3A 4A 5A	49° 00′	r = O + y = y =

TRIANGOLAZIONE

Riduzione al centro della Stazione.

VERTICI	$C - O = \frac{r.\ \text{sen}\ (O + y)}{O\,D\ \text{sen}\ 1''} - \frac{r.\ \text{sen}\ y}{O\,S\ \text{sen}\ 1''}$		
O. Stazione a 9^m, 95 *dal vertice* 7 *del Triangolo* (5. 7. 6).	$O = 67°\ 43'$ $O + y = 376.25$ $y = 308.42$	Distanza dal centro $r = 9^m,95$ Lato di destra $O\,D = 560^m,00$ » di sinistra $O\,S = 518^m,00$	1° termine $= +\ 1036''$ $-$ 2° » $= +\ 3092''$ $C - O = +\ 4128''$
	Calcolo del 1° termine	Calcolo del 2° termine	
D. 6.	Log r $= 0.99782$ Log Sen $(O + y) = 9.45120$ Comp. Log $O\,D = 7.25181$ *C.L.* Sen 1'' $= 5.31443$ Log 1° Termine $= 3.01526$	Log r $= 0.99782$ Log sen $y = -\ 9.89233$ Comp. Log $O\,S = 7.28567$ *C.L.* Sen 1'' $= 5.31443$ Log 2° Termine $= -\ 3.49025$	$O = 67°\ 43'\ 36''$ $C - O = 1.\ 8.\ 48$ $C = 68°\ 52'\ 24''$
S. 5.			
O. Stazione come sopra. (6. 7. 8)	$O = 75°\ 4'$ $O + y = 91.29$ $y = 16.25$	$r = 9^m,95$ $O\,D = 590^m,00$ $O\,S = 560^m,00$	1° termine $= +\ 3477''$ $-$ 2° » $= -\ 1036''$ $C\,O = +\ 2441''$
D. 8.	Log r $= 0.99782$ Log Sen $(O + y) = 9.99985$ Comp. Log $O\,D = 7.22915$ *C.L.* Sen 1'' $= 5.31443$ Log 1° T. [illegible]	Log r $=$ Log Sen y $=$ Comp. L. $O.S$ $=$ *C.L.* Sen 1'' $=$ Log 2° T. [illegible]	$O = 75°\ 4'\ 36''$ $C - O = 0.\ 40.\ 41$ $C = 75°\ 45'\ 17''$
S. 6.			

O. Stazione come sopra. (8. 7. 9)	$O = 63^\circ\ 20'$ $O + y = 154.\ 49$ $y = 91.\ 29$	$r = 9^m,95$ $O\,D = 540^m,00$ $O\,S = 590^m,00$	1° termine $= + 1617''$ 2° » $= - 3477''$ $C - O = - 1860''$
O. Stazione come sopra. (9. 7. 1)	$O = 76^\circ\ 45'$ $O + y = 231.\ 34$ $y = 154.\ 49$	$r = 9^m,95$ $O\,D = 567^m,00$ $O\,S = 540^m,00$	1° termine $= - 2835''$ 2° » $= - 1617''$ $C - O = - 4452''$
O. Stazione come sopra. (1. 7. 5)	$O = 77^\circ\ 8'$ $O + y = 308.\ 42$ $y = 231.\ 34$	$r = 9^m,95$ $O\,D = 518^m,00$ $O\,S = 567^m,00$	1° termine $= - 3092''$ 2° » $= + 2835''$ $C - O = - 257''$

Somma delle correzioni $4128'' + 2441 - (1860 + 4452 + 257) = 0$.

Calcolo dei Triangoli.

VERTICI di ciascun Triangolo	ANGOLI dati	ANGOLI corretti	CALCOLO DEI LATI $OD = DS \frac{\text{sen } S}{\text{sen } O}$	CALCOLO DEI LATI $OS = DS \frac{\text{sen } D}{\text{sen } O}$	LATI dati	LATI dedotti
O. 5.	60° 0' 0''		Log *DS* = 2. 7954072.	Log *DS* } = 2. 8578766.	Base principale	
D. 2.	71. 0. 0		C. l. sen *O* = 0. 0624694.	C. l. sen *O* }	*DS* m.624,32	
S. 1.	49. 0. 0		Log sen *S* = 9. 8777799.	Log sen *D* = 9. 9756701.		*OD* m.544,072
	180° 0' 0''		Log *OD* = 2. 7356565.	Log *OS* = 2. 8335467.		*OS* » 681,625
O. 7.	77° 3' 19''		Log *DS* = 2. 8335467.	Log *DS* } = 2. 8147263.	Base	
D. 5.	55. 16. 41		C. l. sen *O* = 0. 0111796.	C. l. sen *O* }	*DS* m.681,625	
S. 1.	47. 40. 0		L. sen *S* = 9. 8687851.	L. sen *D* = 9. 9148327.		*OD* m.517,025
	180° 0' 0''		Log *OD* = 2. 7135114.	Log *OS* = 2. 7595590.		*OS* » 574,856
O. 6.	53° 3' 48''		Log *DS* = 2. 7135114.	Log *DS* } = 2. 8108015.	Base	
D. 5.	58. 3. 48		C. l. sen *O* = 0. 0972901.	C. l. sen *O* }	*DS* m.517,025	
S. 7.	68. 52. 24		L. sen *S* = 9. 9697819.	L. sen *D* = 9. 9287201.		*OD* m.603,368
	180° 0' 0''		Log *OD* = 2. 7805834	Log *OS* = 2. 7395216		*OS* » 548,936

O. 8.	*dedotto*	49° 9′ 48″	Log DS = 2. 7395216.	Log DS = 2. 8606686.	Base	
D. 6.	55° 19′ 48″		C. l. sen O = 0. 1211470.	C. l. sen O	DS m. 548,936	
S. 7.	75. 30. 24		L. sen S = 9. 9859547.	L. sen D = 9. 9151199.		OD m. 702,463
		180° 0′ 0″	Log OD = 2. 8466233.	Log OS = 2. 7757885.		OS » 596,745
O. 9	53° 54′ 43″		Log DS = 2. 7595590.	Log DS = 2. 8520717.	Base	
D. 7.	79. 45. 17		C. l. sen O = 0. 0925127.	C. l sen O	DS m. 574,856	
S. 1.	50. 20. 0		L. sen S = 9. 8863616.	L. sen D = 9. 9864363.		OD m. 547,562
	180° 0′ 0″		Log OD = 2. 7384333.	Log OS = 2. 8385080.		OS » 689,458
O. 8.	*dedotto*	55° 10′ 12″	Log DS = 2. 7384333.	Log DS = 2. 8273783.	Base	
D. 7.	62° 48′ 36″		C. l. sen O = 0. 0889450.	C. l. sen O	DS m. 547,562	
S. 9.	62. 0. 42		L. sen S = 9. 9484077.	L. sen D = 9. 9491441.		OD m. 596,741
		180° 0′ 0″	Log OD = 2. 7757860.	Log OS = 2. 7765224.		OS » 597,754
O. 10.	55° 0′ 0″		Log DS = 2. 8385080.	Log DS = 2. 9251435.	Base	
D. 9.	62. 30. 0		C. l. sen O = 0. 0866355.	C. l. sen O	DS m. 689,458	
S. 1.	62. 30. 0		L. sen S = 9. 9479289.	L. sen D = 9. 9479289.		OD m. 746,573
	180° 0′ 0″		Log OD = 2. 8730724.	Log OS = 2. 8730724.		OS » 746,573

VERTICI di ciascun Triangolo	ANGOLI dati	ANGOLI dedotti	CALCOLO DEGLI ANGOLI $D > S$. Tang $\frac{1}{2}(D - S) = \frac{OS - OD}{OS + OD}$ cot $\frac{1}{2} O$	$S > D$. Tang $\frac{1}{2}(S - D) = \frac{OD - OS}{OD + OS}$ cot $\frac{1}{2} O$	LATI DATI
O. 2.	72° 40′ 0″	$\frac{1}{2}$ *O.* 36° 20′ 0″	L. cot $\frac{1}{2}O$ = 0. 1334356	$\frac{1}{2}(D+S)$ = 53° 40′ 0″	*OD* m. 537, 292
D. 3.		57. 44. 40	L. d. = 1. 7742395	$\frac{1}{2}(D-S)$ = 4. 4. 40	*OS* » 596, 754
S. 14.		49. 35. 20	Comp. l. s. = 6. 9453869	*D* = 57° 44′ 40″	Somma » 1134, 046
S + D	107. 20. 0		Log t. $\frac{1}{2}(D-S)$ = 8. 8530620	*S* = 49. 35. 20	Diff.a » 59, 462
O. 7.	62° 48′ 36″	$\frac{1}{2}$ *O.* 31° 24′ 18″	Log cot $\frac{1}{2}O$ = 0. 2142984	$\frac{1}{2}(D+S)$ = 58° 35′ 42″	*OD* m. 547, 562
D. 9.		62. 37. 18	L. d. = 1. 6918150	$\frac{1}{2}(D-S)$ = 4. 1. 36	*OS* » 596, 745
S. 8.		54. 34. 6	C. l. s. = 6. 9414574	*D* = 62° 37′ 18″	Somma » 1144, 307
S + D	117. 11. 24		L. t. $\frac{1}{2}(D-S)$ = 8, 8475708	*S* = 54. 34. 6	Diff.a » 49, 183
O. 1.	52° 0′ 0″	$\frac{1}{2}$ *O.* 26° 0′ 0″	L. cot $\frac{1}{2}O$ = 0. 3118182	$\frac{1}{2}(D+S)$ = 64° 0′ 0″	*OD* m. 624, 32
D. 2.		72. 28. 16	L. d. = 1. 9905608	$\frac{1}{2}(D-S)$ = 8. 28. 16	*OS* » 722, 17
S. 14.		55. 31. 44	C. l. s. = 6. 8707968	*D* = 72° 28′ 16″	Somma » 1346, 49
S + D	128. 0. 0		L. t. $\frac{1}{2}(D-S)$ = 9. 1731758	*S* = 55. 31. 44	Diff.a » 97, 85

O. 1.	42° 40′ 0″	$\frac{1}{2}$ O. 21° 20′ 0″	L. cot $\frac{1}{2}$ O = 0. 4083188	$\frac{1}{2}(D+S)$ = 68. 40. 0	OD m. [illegible]
D. 14.		68. 30. 0	L. d. = 0, 9068259	$\frac{1}{2}(S-D)$ = 0. 9. 49	OS » 720, 56
S. 12.		68. 50. 0	C. l. s. = 6. 8408150	S = 68° 49′ 49″	Somma » 1442 73
$S+D$	137. 20. 0		L. t. $\frac{1}{2}(S-D)$ = 7. 4559597	D = 68. 30. 11	Diff.ª » 1, 61
O			L. cot $\frac{1}{2}$ O =	$\frac{1}{2}(D+S)$ =	OD m.
D			L. d. =	$\frac{1}{2}$( ) =	OS »
S			C. l. s. =		Somma »
$S+D$			L. t. $\frac{1}{2}$( )		Diff.ª »
O			L. cot $\frac{1}{2}$ O =	$\frac{1}{2}(D+S)$ =	OD m.
D			L. d. =	$\frac{1}{2}$( ) =	OS »
S			C. l. s. =		Somma »
$S+D$			L. t. $\frac{1}{2}$( )		Diff.ª »

TRIANGOLAZIONE

Modulo E.

Calcolo delle distanze di ciascun punto trigonometrico dalla Meridiana *del punto principale del Comune e dalla sua* Perpendicolare

(Origine delle coordinate 1. *Estremità sud-ovest della base principale*)

PUNTI Trigonometrici	DATI	AZIMUTI $Z = z \pm O$	DISTANZE — DALLA MERIDIANA: $y' = K \operatorname{sen} Z$	DALLA MERIDIANA: $Y = y \pm y'$	DALLA PERPENDICOLARE: $x' = K \cos Z$	DALLA PERPENDICOLARE: $X = x \pm x'$
2. *Estremità nord-est della base principale...*	Lato (1. 2) K = m. 624, 32 Az. del lato (....) Z = ... Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	z = ... O = ... Z = 202° 15′	Log K = 2. 7954072 L. s. Z = 9. 5782364 – Log y' = 2. 3736436 – y' = – 236m 398	y = 0m + y' = – 236m 398 Y = – 236m 398	Log K = 2. 7954072 L. c. Z = 9. 9663954 – Log x' = 2. 7617026 – x' = – 577m 70	x = 0m + x' = – 577m 70 X = – 577m 70
5.	Lato (1. 5) K = m. 681, 625 Az. del lato (1. 2) Z = 202° 15′ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	z = 202° 15′ O = + 49. 0 Z = 251° 15′	Log K = 2. 8385467 L. s. Z = 9. 9763179 – Log y' = 2. 8098646 – y' = – 645m 453	y = 0m + y' = – 645m 453 Y = – 645m 453	Log K = 2. 8335467 L. c. Z = 9. 5069131 – Log x' = 2. 3404598 – x' = – 219m 008	x = 0m + x' = – 219m 008 X = – 219m 008
7.	Lato (1. 7) K = m. 574, 856 Az. del lato (1. 5) Z = 251° 15′ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	z = 251° 15′ O = + 47. 40 Z = 298° 55′	Log K = 2. 7595590 L. s. Z = 9. 9421688 – Log y' = 2. 7017278 – y' = – 503m 185	y = 0m + y' = – 503m 185 Y = – 503m 185	Log K = 2. 7595590 L. c. Z = 9. 6844297 + Log x' = 2. 4439887 x' = + 277m 964	x = 0m + x' = + 277m 964 X = + 277m 964

9.	Lato (1. 9) K = m 689, 458 Az. del lato (1. 7) $Z = 298° 55'$ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	$z = 298° 55'$ $O = +50. 20$ $Z = 349° 15'$	Log $K = 2.8385080$ L. s. $Z = 9.2707648-$ L. $y' = 2.1092728-$ $y' = -128^m 609$	$y = 0^m$ $+y' = -128^m 609$ $Y = -128^m 609$	Log $K = 2.8385080$ L. c. $Z = 9.9923106+$ L. $x' = 2.8308186+$ $x' = +677^m 358$	$x = 0^m$ $+x' = +677^m 358$ $X = +677^m 358$
10.	Lato (1.10) K = m.746, 573 Az. del lato (1. 12) $Z = 107° 35'$ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	$z = 107° 35'$ $-O = -55. 50$ $Z = 51° 45'$	Log $K = 2.8730723$ L. s. $Z = 9.8950450+$ L. $y' = 2.7681173$ $y' = +586^m 296$	$y = 0^m$ $+y' = +586^m 296$ $Y = +586^m 296$	Log $K = 2.8730723$ L. c. $Z = 9.7917566+$ L. $x' = 2.6648289$ $x' = +462^m 299$	$x = 0^m$ $x' = +462^m 299$ $X = +462^m 299$
12.	Lato (1 12) K = m.720, 559 Az. del lato (1. 14) $Z = 150° 15'$ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	$z = 150° 15'$ $-O = -42. 10$ $Z = 107° 35'$	Log $K = 2.8576697$ L. s. $Z = 9.9792198+$ L. $y' = 2.8368895+$ $y' = +686^m 894$	$y = 0^m$ $+y' = +686^m 894$ $Y = +686^m 894$	Log $K = 2.8576697$ L. c. $Z = 9.4801401-$ L. $x' = 2.3378098-$ $x' = -217^m 676$	$x = 0^m$ $+x' = -217^m 676$ $X = -217^m 676$
14.	Lato (1.14) K = m 722, 127 Az. del lato (1. 2) $Z = 202° 15'$ Distanze del Punto (1) dalla M.na $y = 0^m$ dalla P.re $x = 0^m$	$z = 202° 15'$ $-O = -52. 0$ $Z = 150° 15'$	Log $K = 2.8586135$ L. s. $Z = 9.6956712+$ L. $y' = 2.5542847+$ $y' = +358^m 331$	$y = 0^m$ $+y' = +358^m 331$ $Y = +358^m 331$	Log $K = 2.8586135$ L. c. $Z = 9.9386192$ L. $x' = 2.7972327-$ $x' = -626^m 95$	$x = 0^m$ $x' = -626^m 95$ $X = -626^m 95$

LEZIONE QUATTORDICESIMA.

PRINCIPII GEOMETRICI SULLA SFERA.

(letta l' 11 aprile 1851.)

Signori,

Nessuno ignora avere la terra una forma pressochè sferica; dico pressochè sferica, perchè dai grandi lavori geodetici intrapresi a quest'uopo, si venne ad acquistare la certezza che la terra è un corpo irregolare, fatta astrazione anche dalle montagne e dalle cavità, che sono appena sensibili in confronto dell'immensa sua mole. Ma si è pur anche riconosciuto che la sua forma si accosta assaissimo a quella d'un'elissoide di rivoluzione; ed anzi nelle più delicate operazioni dell'alta geodesia si considera appunto come se avesse esattamente quest'ultima forma.

È l'elissoide di rivoluzione un solido generato dal rivolgimento di una semi-elisse intorno ad uno de' suoi assi principali; ed essendo due tali assi in una elisse, son pur due le elissoidi ch'essa può produrre, col rivolgersi attorno all'asse maggiore, oppure attorno all'asse minore.

Di quest'ultima specie è il solido a cui rassomiglia la terra, essendosi trovato che il suo semi-asse minore, o il semi-asse di rivoluzione, è all'incirca di 6 356 649^{m}, ed il suo

semi-asse maggiore di 6 375 739^{m}; ciò che darebbe per lo schiacciamento della terra ai poli $\frac{1}{334}$ dell'asse minore (*).

Questa piccola differenza fra il diametro e l'asse della terra si può da noi trascurare, e riterremo perciò d'ora in poi la terra per una sfera avente di raggio una media fra le quantità sopracitate, cioè di 6 366 194^{m}, o supponendo la circonferenza massima della terra di 40 000 000^{m}, faranno il raggio di 6 366 198^{m}.

Ciò premesso, ricorderemo alcune definizioni, ed alcuni principii geometrici intorno alla sfera, specialmente per ciò che ne riguarda la superficie, e rammenteremo le definizioni di alcune parole frequentemente usate nella geografia e nell'astronomia, delle quali dovremo noi pure servirci nel trattare brevemente delle operazioni dell'alta geodesia.

106. **Principii geometrici sulla sfera.** — La *sfera* è un solido terminato da una superficie curva che ha tutti i suoi punti egualmente distanti da un punto interno C (fig. 59) che si chiama il *centro* della sfera.

La sfera si può anche definire per un solido di rivolu-

(*) Questa frazione, adottata dalla commissione de' pesi e misure all'epoca dello stabilimento del sistema decimale in Francia, è troppo piccola. Tutti i calcoli della grande triangolazione della Francia, e di quella degli Stati di S. M. S. in terraferma, furono eseguiti nell'ipotesi che questo schiacciamento fosse di $\frac{1}{308,64}$. Gli astronomi lo fanno di $\frac{1}{305}$.

PUISSANT. *Traité de géodésie.* Livre III. chap. XIII. *Description géométrique de la France.* Pag. 60, 126. FRANCŒUR. *Géodésie.* Pag. 190-193. *Opérations géodésiques et astronomiques pour la mesure d'un arc du parallèle moyen.* Milan. 1825. *Cenni intorno alla formazione della carta topografica degli Stati di S. M. il Re di Sardegna in terraferma.* Opera del R. C. di Stato Maggiore generale.

zione generato dal rivolgersi di un semicircolo NES intorno al suo diametro immobile NS. Questo diametro prende il nome di *asse*, ed i suoi punti estremi diconsi i *poli* della sfera.

Qualsivoglia sezione fatta da un piano in una sfera è un circolo. Ogni sezione che passa pel centro, come le $NESQ$, $NLSO$, è un *circolo massimo*; tutte le sezioni HI, FG, DE, fatte fuori del centro della sfera, diconsi *circoli minori*. Un circolo massimo divide la sfera e la sua superficie in due parti uguali che chiamansi *emisferi*: un circolo minore divide la superficie della sfera in due parti disuguali chiamate *zone*.

Le estremità di un diametro della sfera perpendicolare ad un circolo si chiamano *i poli del circolo*. I poli di un circolo massimo sono adunque alla distanza di 90° da tutti i punti della sua circonferenza. Da ciò risulta che quando i poli di due circoli massimi sono fra loro distanti di 90°, questi circoli sono perpendicolari l'uno all'altro, poichè ognuno di essi passa per una linea perpendicolare all'altro; e reciprocamente, quando i piani di due circoli massimi sono fra loro perpendicolari, ognuno di essi passa per i poli dell'altro.

È evidente che due circonferenze di circoli massimi si tagliano reciprocamente in due parti uguali. La porzione di superficie sferica $NLSM$ compresa fra due semicirconferenze massime dicesi *fuso sferico*.

107. **Triangolo sferico.** — Si chiama *triangolo sferico* la parte ABC (fig. 60) di superficie sferica, limitata da tre archi di circolo massimo, e *piramide sferica* il solido $OABC$, avente per base un triangolo sferico, ed il vertice al centro O della sfera.

I tre lati CA, CB ed AB del triangolo sferico ABC sono adunque tre archi di circolo massimo, i quali danno rispettivamente la misura dei tre angoli piani COA, COB, AOB, dell'angolo triedro O. Ora si sa che in un angolo triedro, uno qualunque de' suoi tre angoli piani è minore della somma degli altri due: dunque ***un lato qualunque di un triangolo sferico è sempre minore della somma degli altri due.*** Di più la somma dei tre angoli piani che formano l'angolo solido O è sempre minore di quattro angoli retti: dunque ***la somma dei tre lati di un triangolo sferico è sempre minore di una circonferenza di circolo massimo, e ciascuno di essi è minore della semicirconferenza.***

L'angolo sferico ACB è uguale all'angolo fatto dai due circoli massimi $CAFD$ e $BCEF$, a cui appartengono i due archi CA e CB: esso non è adunque altro che l'angolo che farebbero due rette condotte in questi piani, per uno stesso punto, e perpendicolarmente alla loro comune intersecazione. Per conseguenza l'angolo che fanno fra loro le due tangenti CT, CT', condotte pel punto C ai due archi CA e CB, è uguale all'angolo fatto da questi due archi.

Essendo ciascun lato di un triangolo sferico minore di una mezza circonferenza, ne segue che ***ciascun angolo è minore di due angoli retti***, e che perciò ***la somma dei tre angoli è sempre minore di sei angoli retti.***

Se dai tre vertici del triangolo sferico ABC (fig. 61), presi successivamente per poli, si descrivono tre archi di circolo massimo, i quali vengano ad incontrarsi in D, E ed F, questi tre vertici del nuovo triangolo DEF, saranno pure i poli dei tre lati CA, AB, BC del triangolo dato. Infatti A essendo il polo dell'arco ED, ed essendo C

il polo dell'arco DF, il punto D è distante da tutti i punti dell'arco AC di $90°$: così i vertici E ed F sono rispettivamente a $90°$ di distanza dagli archi AB e BC.

I due triangoli ABC e DEF, posti nelle predette condizioni l'uno rispetto all'altro, si chiamano *triangoli polari o supplementari*. Quest'ultima denominazione deriva da ciò che ciascun lato di uno dei due triangoli è il supplemento dell'angolo opposto nell'altro triangolo. Infatti, da quanto si è detto tuttora, l'angolo C del triangolo ABC, ha per misura l'arco MG; ma l'arco FG è un quadrante, come lo è l'arco DM: dunque

$$FG + DM = FD + GM = 180° ;$$

donde

$$GM = 180° - FD = C ;$$

$$HI = 180° - DE = A ,$$

$$LK = 180° - EF = B ;$$

sommando si avrà

$$A + B + C = 540° - (DE + EF + FD) :$$

ma

$$DE + EF + FD < 360° ;$$

dunque

$$A + B + C > 540° - 360° > 180° .$$

Conchiudiamo adunque che *la somma dei tre angoli di un triangolo sferico è sempre maggiore di due angoli retti*: ed essendo questa somma sempre minore di sei angoli retti, come abbiamo poco fa dimostrato, ne segue che *la somma di due angoli di un triangolo sferico non fa conoscere il terzo*, e che *un triangolo sferico può avere tutti e tre gli angoli retti, od anche averli tutti e tre ottusi.*

108. **Asse della terra, poli, equatore, meridiani e paralleli.** — I geografi sul globo terracqueo e gli astronomi sulla sfera celeste, per comodo delle loro ricerche, immaginarono varie linee che, secondo la loro posizione e l'uso a cui sono destinate, prendono nomi diversi.

L'asse della terra NS (fig. 59) è quel diametro intorno a cui essa compie la sua rivoluzione diurna. Le estremità N ed S dell'asse si chiamano i *poli* della terra; quello a noi più vicino dicesi *polo boreale*, o *settentrionale*, o *polo nord;* l'altro chiamasi *polo australe*, o *meridionale*, o *polo sud.*

L'*equatore terrestre* EQ è una circonferenza massima che divide la superficie della terra in due emisferi detti *boreale* ed *australe*, secondo il polo che contengono. Il piano dell'equatore è perpendicolare all'asse della terra.

Tutti i circoli massimi che passano pei poli della terra diconsi *meridiani*, le circonferenze di questi meridiani prendono il nome di *meridiane* de' luoghi pe' quali si immaginano condotte, e dividono ciascuna la superficie terrestre in due parti dette *emisfero orientale* ed *emisfero occidentale.*

Sia PMP' (fig. 62) il meridiano del luogo M, pel punto M si conduca un piano OO' tangente a PMP': questo piano dicesi *l'orizzonte sensibile* del luogo M, ed il circolo massimo RR', parallelo a questo piano, chiamasi *l'orizzonte razionale* del detto luogo. La meridiana si considera altresì come la linea d'intersecazione del piano del meridiano col piano dell'orizzonte sensibile di un luogo.

La linea ZN, che innalzata in M perpendicolarmente all'orizzonte, passa per il centro della terra, è *la verticale* di M; il punto Z posto sulla verticale, al disopra dell'osservatore, chiamasi il *zenit*, ed il punto diametralmente opposto N il *nadir*.

L'equatore taglia l'orizzonte razionale in due punti, de' quali l'uno dicesi l'*occidente*, l'altro l'*oriente*. L'orizzonte vien pure tagliato dal meridiano del luogo in cui trovasi l'osservatore, in duo punti detti il *punto sud* ed il *punto nord*. Questi due punti ed i due precedenti diconsi collettivamente *i punti cardinali* dell'orizzonte.

Tutti i circoli della sfera paralleli all'equatore chiamansi semplicemente *paralleli*. I poli della terra sono nello stesso tempo i poli dell'equatore e di tutti i paralleli.

109. **Azimuto, distanza zenitale.** — *L'azimuto* di un oggetto terrestre, rispetto al luogo M in cui trovasi l'osservatore, è l'angolo che fa il piano verticale che passa per il luogo M e per l'oggetto terrestre, col piano del meridiano di M.

La distanza zenitale di un oggetto terrestre è l'angolo che fa la visuale diretta dall'osservatore all'oggetto, colla verticale del luogo in cui si fa l'osservazione.

110. **Latitudini e longitudini.** — Sia EQ (fig. 59) l'equatore, $NmMS$ il meridiano di un punto m, del quale si vuol determinare la posizione, N e S i poli nord e sud della terra. Essendo la posizione dell'equatore invariabile sulla superficie terrestre, è naturale che si debba cercare la distanza del punto m da questa linea; ciò che si ottiene cercando il numero dei gradi e parti di grado contenuti nell'arco Mm del meridiano. Questo numero di gradi e parti di grado si chiama *la latitudine* del punto m, ed essendo due i paralleli egualmente distanti dall'equatore, uno cioè che trovasi nell'emisfero boreale e l'altro nell'emisfero australe, la latitudine del primo parallelo si dice *boreale* ed *australe* quella del secondo.

Ma la latitudine non basta per distinguere il punto m da tutti gli altri del parallelo AmB. Questa indeterminazione

cessa, se oltre alla distanza mM del punto m dall'equatore, si tien conto ancora dell'angolo, che il piano del meridiano del punto considerato, fa col piano di un altro meridiano NHS cognito di posizione. La grandezza di quest'angolo, che è misurato sull'equatore dall'arco HM, oppure sul parallelo che passa per m, dall'arco hm, si chiama la *longitudine* di questo punto; e siccome due sono i meridiani che fanno lo stesso angolo col meridiano NHS, si indica ancora se la longitudine è *orientale* oppure *occidentale*.

In generale ogni nazione o stato assume per meridiano principale quello che passa per l'osservatorio astronomico della propria città capitale. Così in Francia i gradi di longitudine si contano partendo dal meridiano dell'Osservatorio di Parigi, e si direbbe, per esempio, essere *la Lanterna di Genova* a 44° 24′ 18″ di latitudine boreale, ed a 6° 34′ 0″ di longitudine orientale, mentre da noi si dice essere questa ad 1° 12′ 48″ di longitudine orientale dall'Osservatorio Reale di Torino.

Quando un punto è fissato mediante la sua latitudine e la sua longitudine, è conosciuta la *posizione geografica* di questo punto, nello stesso modo che si conosce la posizione di un punto su di un piano, quando si conoscono le sue distanze dalla meridiana e dalla perpendicolare di un determinato punto del piano.

144. Nozioni intorno alla sfera celeste. — Dovendo ricorrere nelle due lezioni susseguenti, all'osservazione degli astri, ci faremo a considerare per brevi istanti la volta celeste.

Non occorre che mi arresti a provare che la terra fa in 24 ore una rivoluzione intera attorno al proprio asse; donde l'alternarsi dei giorni e delle notti, il levarsi ed il tramontare degli astri.

Osservando attentamente il cammino delle stelle varie ore di seguito, non sarà difficile lo accorgersi che tutte descrivono degli archi di circolo più o meno ampi, secondo la situazione d'ognuna di esse rispetto all'orizzonte. Per esempio, nella latitudine di 45° a cui ci troviamo, le stelle poste all'estremità meridionale dell'orizzonte, quasi appena comparse spariscono, dopo di aver descritta una piccola porzione di circonferenza: quelle che si levano esattamente all'est descrivono una semicirconferenza, e si lasciano da noi vedere per 12 ore consecutive; quelle infine che sorgono tra l'est ed il nord dell'orizzonte stanno al disopra di questo per un tempo tanto maggiore di 12 ore quanto più si allontanano dall'est, e ne vediamo moltissime che mai non tramontano. Queste ultime sembra che descrivano dei circoli interi aventi per centro comune un punto del cielo, intorno a cui pare che tutta la sfera celeste si muova. Questo punto, che si trova sul prolungamento dell'asse della terra, è uno dei poli del mondo, cioè il polo nord. Questo centro è affatto immaginario, nulla esiste nel cielo che lo faccia distinguere: havvi però una stella assai brillante, detta la *stella polare*, la quale descrive intorno al polo un cerchio tanto piccolo, che si può quasi ritenere questa stella come il vero centro intorno a cui descrivono in apparenza le altre stelle i loro circoli.

Un osservatore che si trasporti verso il nord, vedrà la stella polare ad avvicinarsi sempre più al suo zenit, a cui perverrebbe se l'osservatore potesse recarsi al polo nord; se all'incontro esso cammina verso il sud, la stella polare pare che si abbassi, fino a che, giunto che sarà l'osservatore all'equatore, questa stella si troverà all'estremità boreale dell'orizzonte; ed infine procedendo oltre l'equatore,

la stella del polo nord più non comparirà sull'orizzonte, e sorgeranno invece quelle che si trovano presso il polo sud.

La distanza delle stelle dalla terra essendo infinitamente grande in confronto al diametro di questa, se si suppongono condotti due piani, uno tangente alla superficie terrestre e l'altro parallelo a questo, e che passi pel centro della terra, le due circonferenze determinate da questi due piani nella regione delle stelle, non ne faranno che una, perchè lo spazio che le separa, quantunque uguale al semidiametro terrestre, è, a tanta distanza dal nostro occhio, affatto nulla. I due piani predetti sono quelli già da noi chiamati orizzonte sensibile ed orizzonte razionale; la circonferenza unica segnata da questi due piani sulla volta celeste, dicesi *orizzonte celeste.*

La *sfera celeste* è una sfera immaginaria, di raggio infinito, il cui centro è quello stesso della terra, o se si vuole, è l'occhio dell'osservatore posto in qualsivoglia punto della superficie terrestre.

L'*equatore celeste* è una circonferenza massima della sfera celeste, determinata dalla traccia del piano dell'equatore terrestre protratto fino alla regione delle stelle. Gli astronomi danno all'equatore celeste il nome di *cerchio equinoziale.*

Se si suppone il piano del meridiano terrestre di un luogo prolungato fino all'incontro della sfera celeste, esso determinerà il *meridiano celeste* dell'osservatore posto in detto luogo.

L'*azimuto* d'una stella è l'angolo fatto da due piani verticali, i quali intersecandosi sulla verticale di un luogo della terra, passano, uno per il polo elevato sopra l'orizzonte di detto luogo, l'altro per la stella osservata.

Gli archi che sulla sfera celeste corrispondono alle lati-

tudini ed alle longitudini, si chiamano le *declinazioni* e le *ascensioni rette* degli astri. I circoli celesti che corrisponderebbero ai meridiani terrestri, ed ai paralleli, si dicono rispettivamente *circoli orarii* e *circoli diurni*, e gli angoli che i primi fanno intorno ai poli, si chiamano *angoli orarii*. Le ascensioni rette si contano a partire da un punto del circolo equinoziale detto l'*equinozio*, da ponente a levante, in gradi, minuti e secondi, da 0° a 360°, oppure in ore, minuti e secondi di tempo da 0 a 24. La declinazione si misura partendo dal circolo equinoziale: essa è il complemento della distanza dal polo.

Dicesi che un astro è giunto alla sua *culminazione*, quando è pervenuto alla massima sua altezza; in questo caso l'astro trovasi nel meridiano celeste dell'osservatore, e siccome un astro passa in 24 ore due volte nel piano del meridiano, cioè una volta al disopra ed una volta al disotto del polo, così v'ha una *culminazione superiore* ed una *culminazione inferiore*.



LEZIONE QUINDICESIMA.

CENNI SULLE OPERAZIONI DELL'ALTA GEODESIA.

(letta il 18 aprile 1851.)

Signori,

Premesse, nella precedente lezione, alcune indispensabili definizioni e nozioni intorno alle sfere terrestre e celeste, ci proponiamo ora la risoluzione del seguente quesito:

112. **Determinazione della posizione geografica di un punto della superficie terrestre.** — Determinare la posizione geografica di un luogo della terra, vale quanto cercare la sua latitudine e la sua longitudine (§ 110).

Lo scopo a cui miriamo non è però la risoluzione completa di questo problema, che è uno dei più difficili dell'alta geodesia, specialmente nell'esecuzione pratica, ma abbiamo solo in mente di dare un'idea dei mezzi adoperati generalmente in simili ricerche.

Sia A (fig. 63) il luogo di cui si cerca la posizione geografica, EQ l'equatore, C il centro della terra, P, P' i due poli, p la stella polare. La latitudine del punto A è il complemento della distanza zenitale ZAp della stella polare. Infatti la latitudine di un luogo della terra essendo la misura della sua distanza dall'equatore, essa è pure il complemento della distanza di questo luogo dal polo più vicino:

ora essendo la stella polare infinitamente distante dalla terra. il raggio di questa può considerarsi come nullo; l'angolo *ZAP* non differisce adunque dall'angolo *ZCP*. Se pertanto un osservatore dispone in *A* l'asse del cannocchiale di uno stromento munito di un circolo zenitale, nel piano del meridiano (vedremo nella prossima lezione come ciò si possa effettuare), quindi misura gli angoli che la verticale *AZ* fa colle visuali dirette alla stella polare, negl'istanti delle sue culminazioni superiore ed inferiore, la media dei due angoli sarà la distanza del punto *A* dal polo, e deducendo l'angolo ottenuto da 90°, si otterrà la latitudine *EA* cercata.

La determinazione delle longitudini è impresa assai più ardua di quella della ricerca delle latitudini, e a porgere una esatta idea delle infinite difficoltà che si hanno il più delle volte a superare in simili operazioni, dovremmo occuparci di studi che ci condurrebbero troppo lungi dal nostro intento.

Vari furono i metodi finora impiegati od anche soltanto proposti onde pervenire alla più semplice e più esatta soluzione di tale quesito. Noi non faremo che accennare quel metodo che, oltre all'essere di men difficile esecuzione, è pur quello che pare dover condurre a risultati più positivi, ed è ora generalmente adottato dai più distinti geodeti ed astronomi.

A cagione della rotazione diurna della terra intorno al proprio asse, presentando essa successivamente tutti i punti di ciascun parallelo al sole, il modo di contare le ore differisce da un luogo all'altro. Così mentre in un sito è il mezzodì, in quello diametralmente opposto è la mezzanotte; mentre per un luogo nasce il sole, per un altro tramonta; ed infine se in un paese sono le sei ore, in un altro posto

alla distanza di 15° a levante sono le ore sette, ed in quello collocato a 15° verso ponente sono soltanto le cinque.

Ciò posto, il metodo, che oltre ad essere il più semplice è anche il più esatto, sempre che le circostanze permettano di applicarlo, si è il seguente: supponiamo due osservatori muniti ambidue dell'occorrente per determinare esattamente il tempo del luogo in cui si trovano, cioè di buoni cronometri perfettamente regolati sugl'istanti del passaggio del sole ne' rispettivi meridiani, posti in due stazioni *A* e *B*, visibili l'una dall'altra. Alla stazione *A* si farà un segnale istantaneo, ben deciso, come sarebbe, ad esempio, l'accensione d'una piccola quantità di polvere da schioppo, o l'estinzione subitanea d'un fanale a riverbero. Ciascun osservatore noterà l'istante del segnale, e comunicandosi poscia l'un l'altro i risultati, la differenza dei due tempi sarà la differenza in longitudine delle due stazioni *A* e *B*, espressa in minuti e secondi di tempo, che si potrà facilmente ridurre in minuti e secondi angolari, osservando che un'ora corrisponde a 15°. Conoscendo adunque la longitudine d'una delle due stazioni, si verrà a conoscere la longitudine dell'altra. Se p. e. mentre in *A* si fece il segnale, erano le $8^{o}\,15^{m}$, ed in *B* erano le $8^{o}\,5^{m}$, la differenza in longitudine sarebbe, espressa in tempo, uguale a $0^{o}\,10^{m}$, ed espressa in gradi, di 2° 30′. Vale a dire che se le longitudini si computassero a partire dalla stazione *A*, si avrebbe per *B* una longitudine occidentale di 2° 30′ (*).

Da quanto si è detto è evidente che per costrurre la carta di un tratto di paese comunque esteso, basterebbe determinare

(*) Pommiès et Reynaud. *Manuel de l'Ingénieur du cadastre*. Pag. 123-132. - Herschel. *Traité d'astronomie*. Pag. 131 e seguenti. - Puissant *Description géométrique de la France*. Vol. I. pag. 113-118 ecc.

le posizioni geografiche di un numero sufficiente di punti, ciò che darebbe le loro distanze relative, e le distanze assolute si avrebbero mediante la misura di una almeno di esse.

Ma la determinazione diretta delle posizioni geografiche di tutti i punti che si vogliono rappresentare sopra una carta, sarebbe un'operazione troppo laboriosa, ed anche impossibile. La geodesia pertanto si serve di altri mezzi onde pervenire a questo scopo.

113. Triangolazione di primo ordine. — In un modo analogo a quello già da noi esposto pel rilevamento d'un breve tratto di terreno, nell'alta geodesia si suppongono i punti più importanti e visibili a grandi distanze, come, ad esempio, le sommità delle montagne, i campanili e simili, uniti fra loro da linee che coprono il terreno formando una rete di triangoli detti di *primo ordine*, i cui lati hanno ordinariamente da 25 a 30000 metri di lunghezza, ed alcune volte da 40 a 50000.

Gli angoli di questi triangoli si misurano con stromenti costrutti con massima precisione, e si fanno nella misura di ciascuno varie serie di osservazioni, che portano ordinariamente le ripetizioni fino a prendere 36, ed anche 60 volte lo stesso angolo (*). Questi angoli, per la grandezza de' lati, sono realmente quelli formati dalle tangenti condotte ai due archi della sfera terrestre che passano pel punto di stazione e per i punti osservati; laonde i triangoli in questione sono sferici, e la somma dei tre angoli osservati è sempre maggiore di due angoli retti. Perciò, in queste operazioni, la differenza in più che si trova nella somma dei tre angoli di ciascun triangolo, e che chiamasi *eccesso sferico*, non indica

(*) PUISSANT. Opere citate. *Opérations géodésiques etc.* Milan, 1825.

un errore nella misura degli angoli, ma proviene dalla sfericità della terra.

Legendre ha dimostrato che un triangolo sferico poco esteso, relativamente alla sfera a cui appartiene, si può considerare come un triangolo rettilineo che abbia i lati d'ugual lunghezza di quelli del triangolo sferico considerato, ed i cui angoli siano uguali a quelli di questo triangolo, diminuiti ciascuno del terzo dell'eccesso sferico. Per la qual cosa il calcolo dei lati di questi triangoli si riduce a quello dei triangoli rettilinei.

114. Correzioni da farsi alla base di una triangolazione di primo ordine. — Abbiamo a suo luogo veduto come la misura di una base, anche in una triangolazione non molto estesa, debba eseguirsi con somma cura, e non abbiamo tralasciato di osservare che in una triangolazione che debba abbracciare una vasta regione, sia questa l'operazione la più importante e la più delicata, essendo quella su cui si appoggiano tutti i risultati che in seguito si ottengono. Aggiungeremo ora alcune considerazioni che meglio faranno apprezzare l'importanza di un simile lavoro.

Quattro distinte correzioni occorrono prima di ritenere la misura di una base come compiuta:

1.° *Correzione dovuta alle variazioni di temperatura.*

L'influenza del calorico si manifesta sui corpi coll'aumento o colla diminuzione del loro volume. Nel caso presente dobbiamo considerare soltanto le variazioni in lunghezza.

La dilatazione dei regoli che si adoprano può essere cognita o incognita.

Si supponga in primo luogo che siasi impiegato un regolo di ferro, e che questo regolo sia stato campionato, alla

temperatura di 10°, sopra un campione di platino, che alla temperatura del ghiaccio fondente rappresenta il metro legale. La dilatazione lineare del ferro è $D=\frac{1}{81900}=$ 0,00001221 (*); e quella del platino è $d=\frac{1}{116700}=$ 0,0000085 65, per ogni grado del termometro centigrado.

Si tratta *di trovare la temperatura a cui il regolo di ferro è esattamente uguale in lunghezza al metro legale.*

Sia x questa temperatura, l la lunghezza del campione di platino alla temperatura di 10°: si avrà evidentemente, $l-10d$, per la vera lunghezza del campione ricondotto a 0°.

Per discendere dalla temperatura di 10° a quella x, la diminuzione sulla temperatura sarà, $10°-x$, e la diminuzione in lunghezza del regolo di ferro, sarà espressa da $(10-x)D$: la sua lunghezza che a 10° era uguale a quella del campione, cioè uguale ad l, diviene $l-(10-x)D$. Ma questa lunghezza è uguale al metro legale: dunque si avrà:

$$l-10d=l-(10-x)D\,;$$

donde si ricava: $10d=(10-x)D$,

e finalmente

$$x=\frac{10(D-d)}{D}=\frac{10(0,00001221-0,0000085 65)}{0,00001221}$$

$$=\frac{0,00003645}{0,00001221}=\frac{36450}{1221}=2°,98\,.$$

Alla temperatura di 2°,98, il regolo di ferro proposto è adunque uguale al metro legale.

(*) Questa sarebbe la dilatazione del ferro dolce. Puissant, Francoeur, Pommiès et Reynaud. Opere citate.

La temperatura variando ordinariamente da un istante all'altro nel tempo che s'impiega a misurare la base, ad ogni portata si osserva il termometro, e si notano le variazioni; terminata l'operazione si prende la media fra tutte le temperature che si son trovate.

Sia ora B la lunghezza di una base, ovvero il numero esprimente quante volte il regolo, supposto uguale all'unità, si è portato di seguito da un'estremità all'altra della medesima, e sia $18^\circ,08$ la temperatura media. La base B misurata a questa temperatura si sarà necessariamente trovata troppo breve: per ottenere la sua lunghezza vera, si dovrà dividere quella trovata, per la lunghezza che il regolo di ferro deve avere a $2^\circ,98$, o in altri termini, si deve tener conto dell'eccesso di temperatura $18^\circ,08-2^\circ,98=15^\circ,10$.

La lunghezza della base sarà adunque:

$$\frac{B}{1-15,10\times D}=\frac{B}{1-15,10\times 0,00001221}$$

$$=\frac{B}{1-0,0001844}=\frac{B}{0,9998156};$$

e supponendo che il regolo di ferro si sia portato sulla base 10000 volte, si troverà essere la sua lunghezza vera:

$$\frac{10000^m}{0,9998156}=10001^m,84.$$

La differenza di $1^m,84$ è abbastanza sensibile sopra una base di 10000, da non dover essere trascurata nelle operazioni d'alta geodesia, e ciò prova la necessità delle osservazioni termometriche nella misura delle basi.

Se, in secondo luogo, la dilatabilità dei regoli non fosse nota, come quando s'impiegano regoli di legno, converrebbe

stabilire sul terreno un campione invariabile, prendendo una distanza alquanto maggiore di una portata, p. e., se i regoli sono due, della lunghezza di quattro metri ciascuno, il campione si farà di un po' più di 8^m; se i regoli fossero tre, e della lunghezza di cinque metri, si stabilirebbe un campione di 15^m abbondanti. Le estremità di tal campione si fissano con paletti, e si misura quindi la sua lunghezza con un metro di metallo campionato, la cui dilatabilità sia nòta; poscia portando a diversi gradi di temperatura i predetti regoli su questo campione, si riconoscono le loro dilatabilità per le varie temperature.

2.° *Riduzione della base all'orizzonte di uno de' suoi termini:*

Di questa correzione già abbiamo trattato parlando della riduzione delle distanze all'orizzonte.

3.° *Riduzione ad un arco di circolo massimo:*

Può accadere che la base più conveniente AB (fig. 64) non si possa tutta misurare direttamente, ma che dopo di averne misurato un tratto AC, si debba divergere e misurare da C in D: in tal caso, abbassata sulla CD la perpendicolare DB, sarà la lunghezza della base:

$$AB = AC + \sqrt{\overline{DC}^2 + \overline{BD}^2}.$$

Se non fosse possibile di fare retto l'angolo D, nè di misurare BD, si dovrebbero misurare gli angoli BCD e CDB, e trovare poscia BC col calcolo.

In un modo analogo si otterrebbero le parti AC e CB della base AB (fig. 65), se fosse accessibile il solo punto C della medesima; altrimenti si otterrebbe la distanza AB come abbiam veduto doversi fare nella determinazione delle distanze inaccessibili.

4.° *Riduzione al livello del mare.*

Essendo necessario che tutti i punti trigonometrici siano, in una grande triangolazione, proiettati su di una sola superficie sferica, si sceglie quella del livello del mare.

Siano a quest'uopo A e B (fig. 66) le estremità di una base già ridotta all'orizzonte di uno de' suoi estremi, ed a e b le estremità dell'arco al livello del mare, compreso fra i raggi condotti dal centro O della terra ai punti A e B. Siano inoltre, R il raggio Oa, h la differenza di livello fra i punti A ed a, B e b, B la base AB, b la sua proiezione ab; si avrà evidentemente:

$$R+h : R :: B : b = \frac{R \cdot B}{R+h} = B\left(1 - \frac{h}{R} \text{ ecc.}\right).$$

L'altezza h sul livello del mare, si determina ordinariamente col mezzo di osservazioni barometriche.

Queste riduzioni sono quasi sempre assai leggere, e nelle triangolazioni che abbracciano solo il territorio di un comune si possono trascurare.

Onde si possa giudicare degli effetti di tale correzione, ecco il risultato di una base misurata in Baviera dagl'ingegneri–geografi francesi, citato da Puissant, nel suo *Traité de géodésie*, vol. 1, pag. 243: per una base di $21657^m,563$, sopra un suolo elevato 486^m sul livello del mare, si è trovata la correzione da farsi di $-1^m,6532$; donde la base ridotta divenne di $21655^m,9098$.

Dopo la misura e le correzioni della base, si procede alle osservazioni ed alle correzioni degli angoli, e finalmente si calcolano i lati.

Malgrado la somma accuratezza colla quale si misurano gli angoli, sfuggono tuttavia alcune volte degli errori, che

quantunque giungano solo a pochi secondi, influiscono cionullameno sensibilmente sui lati de' grandi triangoli, ed è perciò essenziale di scegliere delle basi di verificazione, onde accertarsi del grado di esattezza che si è ottenuto sulle lunghezze dei lati più distanti dalla base di partenza. A dare un'idea dell'estrema precisione a cui si perviene in simili operazioni, basteranno i seguenti esempi:

Con una grande catena di 150 triangoli di 1.° ordine, si è congiunta una base misurata nei dintorni di Bordeaux dal colonnello Brousseaud, alla base misurata presso il Ticino nel 1800 dall'astronomo Oriani, e si trovò:

Base del Ticino dedotta	9999^m,455
Misura diretta	9999, 254
Differenza	+0^m,201

La base d'Ensisheim in Francia, calcolata mediante una serie di triangoli che partono dalla base di Melun, si trovò:

Base dedotta	19044, 13
Misura diretta	19044, 40
Differenza	—0^m,27 (*).

Dopo di aver calcolati i lati di una rete geodetica, non si posseggono ancora tutti gli elementi necessari per fissare la situazione di ciascun punto trigonometrico sulla sfera, ma occorrono ancora la latitudine e la longitudine di un punto, e l'azimuto di un lato.

L'osservazione astronomica di questi tre elementi per un

(*) PUISSANT. *Nouvelle description géométrique de la France.* Vol. 1. pag. 458, 472 e seguenti.

punto solo, senz'altro calcolo oltre quello dei lati, pare poter rigorosamente bastare alla costruzione del piano trigonometrico; imperocchè, dopo di aver orientata esattamente la base, essendo note le lunghezze di tutti i lati, si potrebbero determinare le situazioni degli altri punti per mezzo d'intersecazioni d'archi: ma oltre al non potersi ammettere questo metodo, per le considerazioni state fatte in altra simile circostanza, cioè per l'accumularsi successivo dei piccoli errori di graficismo, va ancora rigettata per trattarsi qui, non più di un piano, ma di una calotta sferica.

Nelle operazioni d'alta geodesia, le situazioni dei punti trigonometrici si determinano, e mediante le loro distanze dalla meridiana e dalla perpendicolare di uno di essi, partendo dall'azimuto di un lato, come si è altra volta insegnato, e mediante le latitudini e le longitudini dei singoli punti, dedotte dalle longitudini e dalle latitudini di uno di essi, e dall'azimuto di un lato.

Il calcolo delle distanze da due assi ortogonali, nell'attuale circostanza, e le deduzioni delle latitudini e delle longitudini, richiedendo l'impiego della trigonometria sferica, non diremo a questo proposito più di quanto abbiamo fin qui detto.

115. Triangoli di secondo e di terzo ordine. — I punti della triangolazione di primo ordine evidentemente non bastano alla costruzione della carta di un paese; perciò appoggiandosi ai lati dei triangoli di primo ordine, si determinano degli altri punti secondari, e le rette che uniscono questi punti fra loro ed a quelli di primo ordine formano dei nuovi triangoli detti di *secondo ordine*. Gli angoli di questi triangoli non si misurano più con tanta esattezza, ma basta generalmente un'approssimazione di 10″ circa. Finalmente me-

diante i lati di secondo ordine se ne determinano altri che chiamansi di *terzo ordine*.

Le coordinate e le posizioni geografiche dei punti di secondo e di terzo ordine si deducono dagli azimuti, dalle latitudini e dalle longitudini dei pnnti primari. Infine servendosi di tutti qnesti punti o per farvi stazione o come mezzi di orientamento e di verificazione, si rilevano gli ultimi dettagli del terreno secondo i dettami della geodesia elementare.

La geodesia tratta, oltre a quanto abbiamo finora esposto, dei metodi di proiettare la superficie della sfera terrestre, o porzione di essa, sopra un piano: ma ciò ci condurrebbe a parlare della costruzione delle carte topografiche, corografiche e geografiche, delle quali noi non abbiamo ad occnparci.

146. **Limite oltre il quale si può far astrazione della sfericità della terra nella risoluzione di un triangolo.** — Nelle triangolazioni non molto estese ed in cui i lati de' triangoli sono al disotto di 10000 metri, non è necessario di considerare i lati come archi di circolo massimo, ma si possono ritenere come linee rette, senza che perciò ne risulti alcun errore sensibile. Infatti se consideriamo che un arco di 10000^m, sulla superficie della terra supposta uguale ad una sfera il cui circolo massimo sia di $40\,000\,000^m$, ciò che è nel caso nostro sufficientemente esatto, abbraccia solo un arco di $5'24''$, cercando la semicorda di quest'arco, uguale al seno dell'angolo di $2'42''$, colla proporzione:

$$1 : sen\, 2'42'' :: R : x\,;$$

si troverà impiegando i logaritmi:

$$
\begin{aligned}
\log 40.000\,000 &= 7{,}60205999\\
c.\log 2 &= 9{,}69897000\\
c.\log \pi &= 9{,}50285012\\
\hline
\log R &= 6{,}80388801\\
\log \operatorname{sen} 2'\,42'' &= 6{,}8950898\\
\hline
\log x &= 3{,}6989699\\
&= \log 4999{,}999\,;
\end{aligned}
$$

la corda che sottende l'arco di $5'\,24''$ è adunque di $9999^{m},998$.

L'errore che si commette prendendo la corda invece dell'arco, o viceversa, nel caso che questo abbia una lunghezza di 10000^{m} è dunque minore di 2 millimetri, e si può al certo trascurare.



LEZIONE SEDICESIMA.

DETERMINAZIONE DELLA MERIDIANA DI UN LUOGO E MISURA DEGLI AZIMUTI.

(letta il 20 aprile 1854.)

SIGNORI,

L'azimuto di un lato si otterrebbe senza difficoltà, se si conoscesse lungo la meridiana di un suo estremo un secondo punto a cui collimare, o in altri termini, se si avesse una *mira meridiana*. Ma lo stabilimento d'una tal mira richiedendo l'impiego d'un buon cannocchiale meridiano e la costruzione di un osservatorio, devesi il più delle volte, anche nelle triangolazioni di primo ordine, ricorrere ad altri metodi.

147. **Mediante le altezze corrispondenti delle stelle.** — Un metodo assai semplice di determinare l'azimuto d'un lato si è quello di osservare una stella fra le più brillanti a levante del meridiano, dopo di aver fatto coincidere il zero del verniere con quello del cerchio azimutale, di fissare invariabilmente il cerchio zenitale nel momento in cui la stella vien nascosta dalla intersecazione dei due fili del cannocchiale, quindi muovere in giro il cannocchiale finchè la medesima stella ricompaia nel suo campo a ponente del meridiano, e guidare infine, colla vite di richiamo del verniere del disco orizzontale, il cannocchiale, fino a tanto che l'intersecazione

de' fili ricopra di nuovo la stessa stella. È evidente che dividendo l'angolo compreso fra le visuali condotte alle due situazioni della stella, ed avente il vertice al centro del teodolite, in due parti uguali, la bissettrice di quest'angolo darà la direzione della meridiana, e che si avrà l'azimuto cercato, nella media degli angoli osservati, fra il segnale collocato all'altro estremo del lato su cui si fa stazione, e i due siti della stella. Ripetuta più volte simile osservazione su varie stelle successivamente, si prenderà la media fra i diversi risultati. Non è assolutamente necessario che i due zeri coincidano al principiare dell'operazione, perchè la differenza delle due letture sarà evidentemente uguale al doppio dell'azimuto della stella (*).

118. **Mediante le altezze del sole corrispondenti.** — Si sa che l'ombra proiettata sul suolo da un oggetto verticale, p. e. da un bastone, ha una lunghezza massima al levar del sole; che questa lunghezza va via via diminuendo fino al mezzodì, per poi nuovamente allungarsi fino al suo sparire; chè la lunghezza dell'ombra è uguale ad ore ugualmente lontane dall'epoca in cui il sole perviene al meriggio, per la qual cosa segnando sul terreno le estremità delle ombre, p. e. ad un'ora prima che il sole giunga alla massima sua altezza, e ad un'ora dopo che vi è giunto, e dividendo per metà la distanza che separa i due punti così segnati, il punto di mezzo di tale distanza si troverà sulla meridiana che passa per il piede del bastone.

Se adunque sopra un terreno ben piano ed orizzontale si sarà innalzata un'asta SO (fig. 67), esattamente verticale, portante alla sommità una piccola sfera od un disco con un

(*) Herschel. *Traité d'astronomie.* Pag. 131.

foro circolare nel mezzo, pel quale passando i raggi del sole, si proietti sul suolo una piccola elisse; se quindi, fatto centro al piede dell'asta O, si saranno descritte con raggi disuguali varie circonferenze AA', BB', CC', DD': queste circonferenze verranno prima del mezzogiorno successivamente incontrate in N, P, Q ed R, dall'ombra della sfera o dalla piccola elisse luminosa formatasi al centro dell'ombra del disco, ed i punti in cui le circonferenze saranno intersecate dal centro dell'ombra della sfera o della piccola elisse, si segneranno con chiodi o coi piuoli. Ad ore ugualmente distanti dal mezzodì, l'ombra e l'elisse ritorneranno in ordine inverso sulle predette circonferenze in N', P', Q' ed R', e si segneranno come prima tutti i punti d'intersecazione. Ciò fatto, si divideranno per metà gli archi NN', PP', QQ' ed RR', e la retta che congiungerà tutti i punti di mezzo M, M', M'', M''', di questi archi, passerà pure pel centro O di tutti i circoli, e sarà la meridiana del piede dell'asta, che si potrà prolungare a piacimento.

Invece di tracciare i circoli sul terreno, si possono disegnare sopra una tavola da disegno, p. e. sullo specchio della tavoletta.

A quest'uopo si collochi la tavoletta ben orizzontale, dopo di avervi disteso ed incollato un foglio da disegno, con uno de' suoi lati maggiori verso il sud; alla metà circa di questo lato s'innalzi una colonnetta od una verga di metallo che porti alla sommità una lamina ovale pure di metallo, la quale abbia nel mezzo un piccolo foro di un millimetro circa di diametro: sia questa lamina inclinata di 45° all'orizzonte, in modo che la parte più bassa sia rivolta a mezzogiorno, e il foro rimanga fuori della colonna. Dal centro di questo foro si lasci cadere un filo a piombo il cui peso termini in

punta acuta, e che le sia attaccato in modo che la detta punta si trovi precisamente sulla continuazione del filo. È evidente che questa punta è destinata a segnare sul foglio la proiezione orizzontale del centro del foro. Trovato il punto di proiezione del foro, si descrivano varie circonferenze che abbiano per centro comune questo punto, ed incominciando le operazioni alle ore 9 circa del mattino, si procuri che la maggiore delle circonferenze sia prossima, colla sua convessità, all'immagine del sole proiettata dal foro sullo specchio della tavoletta. Non tarderà tale simulacro ad invadere la detta maggiore circonferenza, e quindi successivamente tutte le altre; di mano in mano che la piccola elisse è divisa per metà da una circonferenza, si segna leggermente su questa il punto che si reputa il centro dell'elisse. Dopo il mezzodì si ripetano le osservazioni ed i tagli delle circonferenze ad ore corrispondenti a quelle del mattino. Si dividano finalmente tutti gli archi così determinati per metà: la linea che unisce tutti i punti di mezzo degli archi, sarà la meridiana cercata, e mettendo il filo della riga di una diottra lungo questa meridiana, se ne potrà far segnare il prolungamento sul terreno.

Questo metodo suppone che il sole descriva ogni giorno un parallelo all'equatore celeste, ossia che ad ugual distanza di tempo dal mezzodì le altezze del sole siano uguali: quest'astro però, dopo di aver percorso uno dei paralleli, non passa istantaneamente in un altro, ma vi giugne insensibilmente, descrivendo un cammino obbliquo riguardo ai paralleli. Si dovrebbe adunque correggere l'angolo diviso dalla meridiana in due parti uguali, dell'errore che può cagionare questa obbliquità; ma un tale errore non è, nello spazio di poche ore, abbastanza sensibile da doverne temere una

notevole deviazione nella direzione della meridiana. Si osservi ancora che nelle epoche de' solstizi questo errore è nullo (*).

119. **Mediante il levarsi ed il tramontare del sole.** — Per queste osservazioni bisogna che il cannocchiale sia munito d'un vetro annerito onde poter fissare il sole.

Si voglia p. e. determinare l'azimuto del lato CA (fig. 68), facendo stazione in C.

Allo spuntar del sole si osservi l'angolo SCA, ed al suo tramontare si osservi l'angolo ACS'; si divida la somma dei due angoli $SCA+ACS'$ per metà; la differenza tra questa semisomma e l'angolo ACS, o tra l'angolo ACS' e questa semisomma, sarà l'azimuto cercato, o l'angolo ACM. Ripetendo questa operazione più giorni di seguito, si avrà nella media di tutti i risultati ottenuti, la direzione della meridiana CM, o l'azimuto del lato AC (**).

120. **Mediante la stella polare.** — Chi in una notte serena rivolga lo sguardo al cielo dalla parte di tramontana, non tarderà a scoprire una grande costellazione, o gruppo di sette stelle assai rimarchevoli, quasi tutte d'uguale grandezza, disposte in modo che quattro di esse formano un quadrilatero, e le tre altre un triangolo con un angolo molto ottuso, come viene indicato nella fig. 69, presso la circonferenza del più grande dei due circoli concentrici in essa figura descritti. Questa costellazione è volgarmente detta il *gran carro*, ed è dagli astronomi chiamata l'*orsa maggiore*. Se si prolunga il lato del quadrilatero segnato dalle stelle α e β fin verso la metà dell'altezza del cielo, dalla parte boreale,

(*) Cagnoli. *Notizie astronomiche adattate all'uso comune.* Pag. 320 e seguenti.

(**) Testu. *Topographie et géodésie élémentaire.* Pag 82.

questa linea passerà assai vicino ad una stella brillante detta la stella polare (§ 111), per la sua prossimità al polo, intorno al quale pare che tutti gli astri descrivano in 24 ore de' circoli aventi il centro in questo punto.

La stella polare appartiene ad una costellazione affatto simile alla precedente, ma formata di stelle meno lucenti, e rivolta in senso contrario, che vien chiamata la *piccola orsa*.

Riconosciuta questa stella nel cielo, sarà facile disporre la crociera del cannocchiale del teodolite o di quello della diottra della tavoletta, nel piano verticale che passa per la medesima, e quindi far tracciare un allineamento mediante segnali di fuoco o bianchi, nella direzione così determinata, oppure misurare l'angolo fatto da tale direzione, con un oggetto terrestre su cui si sarà posto un fanale. Se si fosse privi di teodolite o di diottra, oppure che il cannocchiale non permettesse, per la poca distanza del suo asse di movimento dal piano dello stromento, di dirigere la sua crociera alla stella polare, si dovrebbe far uso di un filo a piombo sospeso sopra il punto di cui cercasi la meridiana, e ponendosi quindi a qualche distanza dietro questo filo, in modo che la stella polare si veda da esso intersecata, si farebbe segnare la meridiana come si è precedentemente indicato.

La direzione della meridiana, o l'azimuto osservato, saranno però soltanto più o meno prossimi al vero, perchè, come abbiamo in una delle precedenti lezioni accennato, la stella polare non è precisamente al polo nord, ma descrive intorno a questo punto un circolo di raggio non molto grande, e si trova in due istanti del suo apparente corso nel piano di uno stesso meridiano, cioè nelle sue culminazioni,

e due volte si trova alla massima distanza da tale piano, e ciò ha luogo nelle sue *elungazioni massime*, *orientale* e *occidentale*. È adunque facile lo scorgere che la direzione della meridiana o la misura dell'azimuto saranno solo esatti quando siasi operato in uno degli istanti delle culminazioni dell'astro, e che saranno più lontane dal vero se l'istante delle osservazioni fu uno di quelli delle massime elungazioni.

La distanza della stella polare dal polo non è costante, ma va diminuendo lentamente, e dalla *Connaissance des temps pour* 1854 si ricava che al 1.° gennaio del corrente anno, questa distanza era di 1°28′8″. Se adunque si osserva la stella polare negl'istanti più sfavorevoli, si avrà il massimo errore, e nei tempi intermedi, gli errori saranno, o nulli, o più o men grandi, ma non oltrepasseranno mai il limite di 1°28′8″.

Pommier e Reynaud, nel *Manuel de l'Ingénieur du cadastre*, 1808, pag. 130, Testu, nel *Manuel de topographie et géodésie élémentaire*, 1849, pag. 82, ed altri, suggeriscono di scegliere l'istante in cui il filo a piombo copre la stella polare e la stella della coda della grand'orsa detta ε dagli astronomi. Questo metodo che era esatto nell'anno 1751, nel corso del quale le predette due stelle passavano assieme nel piano di uno stesso meridiano, non lo era digià più qualche anno dopo, ed in quello in cui scrivevano Pommier e Reynaud, cioè nel 1807, essi avvertivano che la stella ε della grand'orsa passava al meridiano dell'osservatore $6^m\,44^s$ prima della polare, e che, chi avesse aspirato ad un'estrema precisione, doveva aspettare altrettanto tempo dopo l'istante del passaggio delle due stelle in uno stesso piano verticale condotto pel luogo di stazione, a dirigere la visuale alla stella polare.

Ora l'intervallo che trascorre fra l'istante del passaggio della prima stella al meridiano, e quello del passaggio della seconda, è cresciuto fino ad essere il 1.° gennaio 1854 di $18^m 37^s$. E siccome nel punto in cui la stella ε della grand'orsa passa al meridiano superiore procedendo da levante a ponente, la stella polare si avvicina al meridiano inferiore procedendo da ponente a levante, e viceversa, prima che succeda il passaggio al meridiano di quest'astro, le due stelle devono evidentemente trovarsi insieme nello stesso piano perpendicolare all'orizzonte dell'osservatore, e si devono in quel punto vedere entrambe intersecate da uno stesso filo a piombo. Se si conoscesse adunque il tempo che deve trascorrere fra questo istante e quello del passaggio della stella polare al meridiano, si potrebbe colpire questa nel momento il più opportuno per determinare con precisione la meridiana.

Ciò posto, tentiamo di *determinare il tempo che è trascorso il 1.° gennaio 1854, tra il passaggio delle due stelle ε della grand'orsa, ed α della piccola orsa, nello stesso piano perpendicolare all'orizzonte di un osservatore, ed il passaggio della seconda stella al meridiano del luogo in cui si fanno le osservazioni.*

Sia (fig. 70) $O'\varepsilon O$ il parallelo al circolo equinoziale che la stella ε della grand'orsa descrive apparentemente in 24 ore intorno al polo dell'equatore, ed $M\alpha M'$ quello che la stella polare percorre nello stesso tempo. Nella figura si suppone che questi due circoli siano proiettati sul piano del circolo equinoziale, nella quale ipotesi la proiezione P del polo è il centro stesso del cerchio equinoziale, o quello della terra.

Sia inoltre ZN l'intersecazione del meridiano che passa

fra i piedi dell'osservatore, col predetto circolo massimo, ed OO' l'intersecazione collo stesso circolo dell'orizzonte celeste.

Egli è evidente che noi scopriremo i due astri di cui si tratta, in uno stesso piano perpendicolare al nostro orizzonte, o li vedremo nello stesso tempo intersecati da un filo a piombo sospeso nel luogo di stazione, e posto fra noi e i predetti due astri, allorchè le proiezioni de' loro centri sul circolo equinoziale cadranno sopra una medesima retta $\varepsilon\alpha$ perpendicolare ad OO'.

Dalla *Connaissance des temps pour l'an* 1854, si ricavano i seguenti dati:

Posizione media della stella ε della grand'orsa il 1.° gennaio 1854.

Ascensione retta . . . $12^{o}\,47^{m}\,35^{s},53$.

Declinazione boreale $56^{o}\,45'\,10'',\,8$.

Posizione media della stella polare, α della piccola orsa, alla medesima epoca.

Ascensione retta. . . $1^{o}\;6^{m}\,12^{s},\,09$.

Declinazione boreale $88^{o}\,31'\,52'',14$.

L'ascensione retta della stella polare essendo di $1^{o}6^{m}12^{s},09$, mentre quella di ε della grand'orsa è di $12^{o}47^{m}35^{s},53$, e contandosi le ascensioni rette da ponente a levante, cioè in senso contrario a quello del moto diurno delle stelle, ne segue che quando ε passerà pel meridiano, la stella polare sarà in ritardo di $1^{o}6^{m}12^{s},09 - 0^{o}47^{m}35^{s},53 = 18^{m}36^{s},56$, come già si era accennato.

Sia adunque $\alpha'M'$ la strada che rimane a percorrersi dalla stella polare prima di passare al meridiano ZN, al-

l'istante in cui la stella ε della grand'orsa è pervenuta sullo stesso meridiano in ε': questa strada la stella polare la descrive in $18^m 36^s,56$; ma nello stesso intervallo di tempo l'altra stella da ε' si reca in ε'', percorrendo una distanza angolare $\varepsilon' P \varepsilon'' = M' P \alpha'$. Nel frattempo i due astri avranno incontrato la $\varepsilon\alpha$ perpendicolare ad OO', una al disopra e l'altra al disotto di questa, e nell'istante dell'incontro, l'angolo $\varepsilon' P \varepsilon = \alpha P \alpha' = M' P \alpha' - M' P \alpha$. Ma gli archi descritti in tempi uguali essendo proporzionali ai rispettivi raggi, se si chiamano R ed r i raggi Po, PO dei circoli diurni delle due stelle, e se si fa $\varepsilon\varepsilon' = y$, $M'\alpha = x$, si avrà la proporzione:

$$M'\alpha' - x : y :: r : R ;$$

d'onde si deduce

$$R(M'\alpha' - x) = ry .$$

Se in quest'equazione si considerano i due piccoli archi $M'\alpha$, $\varepsilon\varepsilon'$, come se fossero linee rette, epperciò come due parallele comprese fra parallele, ne risulterà $x = y$, e finalmente:

$$x = \frac{M'\alpha' \times R}{R + r} = y \ldots \qquad \text{(A)}$$

Ora R ed r sono evidentemente i seni delle distanze dal polo di ε ed α; dunque v'ha:

$$R = sen\, 33^\circ\, 14'\, 50'' ,$$

$$r = sen\; 1^\circ\, 28'\; 8'' ;$$

$$log\, R = 9,73898 = log\; 0,54825 ,$$

$$log\; r = 8,40882 = log\; 0,02563 .$$

Per ridurre $18^m 37^s$ ossia 1117^s in arco del circolo diurno della piccola orsa, si stabilisce la seguente proporzione, osservando che la semicirconferenza comprende 43200 secondi di tempo:

$$43200 : 1117 :: \pi \times 0,02563 : M'\alpha'$$

$$\begin{aligned} \log 1117 &= 3,04805 \\ \log \pi &= 0,49715 \\ \log r &= 8,40882 \\ c.\log 43200 &= 5,36452 \\ \log M'\alpha' &= 7,31854 = \log 0,002082 . \end{aligned}$$

Mettendo i precedenti dati nell'equazione (A), si avrà:

$$x = y = \frac{0,002082 \times 0,54825}{0,57388} .$$

Calcolo di x=y.

$$\begin{aligned} \log 0,002082 &= 7,31854 \\ \log 0,54825 &= 9,73898 \\ c.l.\ 0,57388 &= 0,24117 \\ \log x = \log y &= 7,29869 = \log 0,001989 . \end{aligned}$$

Finalmente considerando che mentre ε della grand'orsa trascorre da ε' in ε, per lo spazio 0,001989, la stella polare si trasferisce da α' in α pel tratto $\alpha\alpha' = 0,002082 - 0,001989 = 0,000093$; riducendo questi due archi in minuti secondi di tempo, si dovranno ottenere risultati uguali.

Per fare queste due riduzioni avremo le proporzioni:

$$\pi \times 0,02563 : 0,000093 :: 43200^2 : (x)^2,$$

$$\pi \times 0,54825 : 0,001989 :: 43200^2 : (y)^2.$$

Calcolo di $(x)^2$ *e di* $(y)^2$.

$$\begin{aligned} \log 0,000093 &= 5,96853 \\ \log 43200 &= 4,63548 \\ c.\log \pi &= 9,50285 \\ c.\log 0,02563 &= 1,59118 \\ \hline \log (x)^2 &= 1,69804 = \log 49'',89\,. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \log 0,001989 &= 7,29869 \\ \log 43200 &= 4,63548 \\ c.\log \pi &= 9,50285 \\ c.\log 0,54825 &= 0,26102 \\ \hline \log (y)^2 &= 1,69804 = \log 49'',89\,. \end{aligned}$$

L'errore cagionato dall'ipotesi $x=y$ non influisce adunque sui centesimi di minuto secondo, ed è perciò affatto insensibile.

Si può pertanto conchiudere, che la prima stella della coda della grand'orsa, e la stella polare, si trovarono, il 1.° gennaio del corrente anno, intersecate da uno stesso filo a piombo, $50''$ dopo che la prima ebbe attraversato il meridiano, e che da quest'istante trascorsero ancora $17^m\,46''$; prima che il meridiano fosse pure attraversato dalla stella

polare, e siccome la differenza in ascensione retta va lentamente aumentando, si dovrà pel corso d'alcuni anni lasciar trascorrere non più di 18^m e non meno di $17^m 30^s$ dall'istante in cui le due stelle sono entrambe intersecate dal filo a piombo, prima di collimare alla stella polare, se vuolsi ottenere con molta approssimazione la direzione della meridiana.

Nel calcolo degli azimuti, quando si tratti di ottenerli con tutta la precisione richiesta in una triangolazione di primo ordine, voglionsi introdurre alcuni elementi che noi non possiamo che accennare; essi sono: la posizione geografica della stazione, epperciò le irregolarità nella forma della terra; le refrazioni laterali ed altre anomalie riconosciute dagli astronomi ne' moti apparenti degli astri; le correzioni dovute alle imperfezioni degli stromenti geodetici di cui si fa uso, che sfuggono alle verificazioni e rettificazioni, e sono impercettibili nelle altre operazioni, ma si rendono in questa abbastanza sensibili da doversene tener conto; finalmente le correzioni richieste dalle imperfezioni degli stromenti adoperati nella misura del tempo. Ciononostante i risultati del calcolo da noi istituito nell'ipotesi che non abbiasi a tener conto di tutte queste cause di errori, sono sufficientemente esatti per la determinazione della meridiana di un territorio, ed è presumibile che adoperando un buon teodolite e ripetendo alcune volte le osservazioni, gli errori che si commettono nella misura degli azimuti, non eccedano il limite di circa tre minuti sessagesimali.

Si noti ancora che la luce che viene dalle stelle non basta a rischiarare di notte i fili del micrometro, ed è perciò necessario di collocare un lume a riverbero presso l'obbiettivo del cannocchiale, che ne illumini l'interno.



LEZIONE DICIASSETTESIMA.

ALTIMETRIA.

LIVELLI.

(letta il 22 aprile 1854).

Signori,

A dare una compiuta idea della forma di un tratto della superficie terrestre, non basta evidentemente avere eseguito ad una determinata scala una figura simile alla sua pianta naturale, ma conviene eziandio segnare con cifre le rispettive altezze o depressioni, sopra o sotto un dato piano di paragone, dei punti principali in essa figura rappresentati, oppure, con metodi geometrici ed artistici, devonsi rendere evidenti la grandezza e la forma delle accidentalità del suolo.

Quella parte della geodesia elementare che tratta della ricerca delle altezze e delle depressioni dei punti, si chiama *altimetria o livellazione.*

Nella prima lezione abbiam detto che per linea o piano di livello s'intende una linea od un piano paralleli alle acque stagnanti. Ora che conosciamo con sufficiente approssimazione la forma generale della terra, possiamo estendere questa definizione, e dire che intendiamo per linee e per superficie di livello, quelle che sono parallele alla superficie delle acque del mare; considerando la superficie del mare come quella di una sfera, il cui circolo massimo sia di 40 000 000 di metri, epperciò il suo raggio di 6 366 198^{m}, ciò che nella livellazione è in generale sufficientemente esatto.

Ciò posto, finchè si tratta di linee o di superficie che non eccedono i 300 o i 400^{m} in estensione, si potranno in pratica considerare come linee rette e come superficie piane (ciò si renderà in seguito evidente), ma oltre questi limiti si dovranno sempre considerare come appartenenti a superficie sferiche, aventi tutti i loro punti ugualmente distanti dal centro della terra. Così tutte le verticali comprese in uno spazio come sopra limitato, si possono considerare come parallele; ma in generale essendo le verticali normali alle superficie di livello, prolungate abbastanza verrebbero ad incontrarsi al centro della terra, epperciò non sono parallele.

Due punti *A* e *B* (fig. 71) di livello, sono adunque ugualmente distanti dal centro della terra, ed il punto *B'* più alto del punto *A* della quantità *BB'*, è più distante dal centro *C* della terra di tutta questa quantità.

Gli strumenti coi quali si fanno le livellazioni prendono il nome di *livelli;* i livelli più in uso sono: il *livello a pendolo* che già conosciamo; il *livello ad acqua*, ed il *livello a bolla d'aria con cannocchiale.*

121. Livello ad acqua. – Il livello ad acqua (fig. 72) è composto di un sifone di metallo di uno a due centimetri di diametro, e della lunghezza di circa un metro; esso è ricurvo ne' suoi estremi, e le parti ricurve, che sono brevissime, portano due tubi di vetro o bicchieri, del diametro di circa cinque centimetri, il cui asse è perpendicolare alla parte più lunga del sifone, la quale ha inoltre nel mezzo, e diametralmente opposto ai due bicchieri, un manico cavo, pure perpendicolare alla lunghezza maggiore del sifone: in questo manico si può inserire un bastone di squadro, o meglio un trepiede, onde potersi servire dello stromento

nelle livellazioni. Posto il livello sul suo bastone o sul trepiede in modo che il suo braccio sia prossimamente orizzontale, si versa in uno dei due bicchieri dell'acqua, finchè si scorgano questi pieni sino alla metà o ai due terzi circa della loro altezza. In virtù della nota proprietà de' liquidi, allorchè l'acqua sarà tranquilla, le superficie superiori di essa nei due tubi si troveranno in uno stesso piano orizzontale; cosicchè dirigendo delle visuali tangenti alle circonferenze oscure che appariscono all'esterno dei due bicchieri (fig. 73), queste visuali saranno tante linee di livello, e se si farà girare il livello sul capo del suo bastone, tutte le visuali che si condurranno nel modo sovraindicato, saranno in uno stesso piano orizzontale.

Prima di servirsi del livello, dopo di avervi versata l'acqua, converrà assicurarsi che non vi sia rimasta dentro al braccio del sifone alcuna bolla d'aria, la quale sortendo poi mentre si fa girare lo stromento sul capo del bastone, potrebbe cagionare qualche leggera differenza nell'altezza del piano di livello determinato dalla superficie dell'acqua nei due tubi di vetro.

I bicchieri di un livello ad acqua devono essere di diametro sensibilmente uguale, senza di ciò le operazioni sarebbero difettose, perchè l'altezza del piano di livello varierebbe ad ogni nuova posizione che si darebbe al livello nel fare un giro d'orizzonte.

122. Mira o scopo. — Oltre al livello, per eseguire una livellazione richiedesi un'asta ben diritta (fig. 74), che si fa ordinariamente ottagona, della lunghezza di tre a quattro metri divisi in centimetri, composta di due pezzi uguali, per poterla più comodamente trasportare; quando si deve adoperare si uniscono fra loro i due pezzi mediante una

vite. Lungo l'asta scorre un rettangolo di $0^m,20$ circa di larghezza per $0^m,15$ d'altezza; questo rettangolo, che chiamasi *scopo* o *mira*, è diviso in due scompartimenti di colore diverso, bianco e nero, o bianco e rosso, mediante una linea parallela al maggior lato, od è diviso in quattro da due linee parallele ai due lati. La linea parallela al lato maggiore è quella che dev'essere colpita dalla visuale orizzontale diretta mediante il livello. A questa linea corrisponde il zero di un verniere che dà i millimetri, ed è segnato sul tubo d'ottone, mediante il quale lo scopo può scorrere lungo l'asta. Invece dell'asta fin qui descritta si adopera altresì una stadia le cui minime divisioni sono uguali ai centimetri del metro naturale, e su questa l'operatore può leggere nello stesso tempo l'altezza della visuale e la distanza a cui è collocata la stadia, quando faccia uso di livello a cannocchiale munito di un micrometro costrutto appositamente (§ 12).

123. **Livello a bolla d'aria con cannocchiale.** – Non tutti i livelli a cannocchiale sono costrutti in ugual modo; i più comuni però hanno la forma rappresentata fig. 75, ed in generale si compongono di un cannocchiale ordinario *a*, *b*, munito di reticolo, come quello della diottra della tavoletta: questo cannocchiale è sostenuto da una piccola colonna *c*, in modo che possa fare il giro dell'orizzonte senza scomporsi; al cannocchiale è unito un livello a bolla d'aria *d*, *e*, che si può con opportuni congegni disporre in modo che la bolla d'aria venga ad occupare il mezzo del tubo in cui è racchiusa, mentre l'asse del cannocchiale è orizzontale, nel qual caso lo stromento dicesi *rettificato*.

A fare compiuta la rettificazione di un livello come quello fig. 75, si richiede:

1° *Che uno dei due fili del reticolo sia verticale, nel qual caso l'altro sarà orizzontale.*

2° *Che l'intersecazione dei predetti due fili si trovi precisamente nell'asse del cannocchiale.*

3° *Che l'asse del cannocchiale sia orizzontale quando la bolla d'aria è nel mezzo del livello.*

La prima condizione si verifica dirigendo una visuale ad un filo a piombo o allo spigolo di un edifizio, e, se occorre, facendo girare il cannocchiale sul suo asse finchè uno dei due fili coincida colla verticale osservata.

Si riconosce la seconda condizione osservando alla distanza di 150 o 200 metri un punto all'intersecazione dei due fili, oppure si fa portare a tale distanza l'asta col suo scopo; poscia si fa alzare e abbassare lo scopo fino a tanto che i due fili coincidano perfettamente colle due linee di divisione *ab*, *cd* (fig. 76) di esso scopo, cosicchè l'intersecazione dei due fili coprirà il punto *O*: facendo poi girare il cannocchiale intorno al proprio asse fino a compiere un mezzo giro, se in questo movimento l'intersecazione dei due fili continua a coprire il punto osservato, la seconda condizione sarà adempiuta. Se l'intersecazione dei due fili fosse in *o* (fig. 76), fuori dell'asse del cannocchiale, dopo il mezzo giro, i due fili *ab* e *cd* prenderebbero rispettivamente le posizioni *a'b'* e *c'd'*, ed il punto d'intersecazione trasportandosi da *o* in *o'*, più non coprirebbe il punto osservato. In questo caso, mediante una piccola vite *v* s'incomincia a trasportare *c'd'* in *CD*, alla metà della distanza fra la prima posizione *cd* e la seconda *c'd'*, poscia mediante un'altra vite *v'*, si trasporta *a'b'* in *AB*. Si ripetono quindi le osservazioni finchè nel girare il cannocchiale sul suo asse, il punto *O* più non abbandoni il punto osservato.

La terza condizione finalmente si ottiene rendendo prima l'asse di rotazione verticale nel seguente modo: si dispone il cannocchiale nella direzione della retta che unisce i centri di due delle viti p e q (fig. 75), sulla diagonale del quadrato fatto da tutte e quattro; si fa venire la bolla d'aria nel mezzo del livello, facendo contemporaneamente girare quelle due viti in senso contrario: si fa quindi descrivere allo stromento un mezzo giro, e se nella nuova posizione del livello la bolla non ritorna nel mezzo del suo tubo, si farà venire, facendole percorrere metà del cammino colla vite di richiamo d, e metà con una delle due viti del piede p e q. Ripetendo questa operazione finchè la bolla rimanga nel mezzo in tutte e due le posizioni del livello, si potrà conchiudere che il livello è perpendicolare all'asse di rotazione. Si renderà poscia quest'asse verticale disponendo anche il livello nella direzione perpendicolare a quella delle viti p e q.

Per farci un'idea chiara di questa operazione, sia MM' (fig. 77) il piano del piccolo disco, al cui centro s'innalza perpendicolarmente l'asse di rotazione PQ, che supponiamo inclinato all'orizzonte OO', mentre il livello LL' è orizzontale. Le distanze dei capi del livello LM, $L'M'$, dal piano del disco, saranno disugnali, ed il livello farà con questo piano un angolo $LQm = OPM$. Facendo un mezzo giro intorno all'asse inclinato PQ, il livello descriverà una superficie conica, e nella nuova sua posizione ll', farà con mm' un angolo $lQm = LQm$, ed uguale alla metà dell'angolo totale lQL, che le due posizioni del livello fanno fra di loro, per la qual cosa il livello non sarà più orizzontale, e la bolla d'aria si porterà in l. Se adunque mediante la vite d (fig. 75) si fa discendere il capo l del livello fino in L,

oppure si fa salire l' in L', il livello prenderà una delle due posizioni Ll', lL', parallele ad MM'; e se finalmente col mezzo delle due viti p e q si rende MM' orizzontale, la bolla d'aria ricomparirà nel mezzo del tubo.

Dopo ciò l'asse di rotazione è verticale e più non rimane che a rendere l'asse del cannocchiale perpendicolare a quest'asse. Si faccia collocare l'asta verticalmente a 200^m di distanza dal livello, e si faccia alzare ed abbassare lo scopo finchè il filo orizzontale del reticolo coincida colla linea orizzontale della mira, e si noti l'altezza a cui si è portato lo scopo: si faccia quindi l'inversione del cannocchiale, e facendo girare lo stromento, si riconduca all'occhio l'oculare, si diriga un'altra visuale alla linea orizzontale della mira, ciò che in generale costringerà a rimuovere questa dall'altezza primitiva: si noti la nuova altezza; si prenda la media delle due, e finalmente fissato lo scopo a questa media altezza; col mezzo delle viti f, g che alzano o abbassano uno dei due sostegni del cannocchiale, e che imprimono perciò lo stesso moto ad uno dei due capi di questo, si faccia coincidere il filo orizzontale colla linea fiduciale dello scopo. Terminata questa operazione è assai difficile che la bolla d'aria del livello abbia continuato a stare nel mezzo del tubo di vetro, perciò la vi si ricondurrà, e si ripeteranno le ultime osservazioni e correzioni finchè non rimanga più dubbio sull'esatta rettificazione dello stromento.

Questo procedimento è fondato sulle seguenti considerazioni. Sia MM' (fig. 78) un piano parallelo a quello del piccolo disco, supposto orizzontale, C e c le estremità del cannocchiale inclinato, CM e cM' le distanze disuguali di queste estremità dal detto piano, AE l'altezza dello scopo alla prima os-

servazione: dopo l'inversione del cannocchiale, se si riconduce l'oculare all'occhio, essendo PQ verticale, il cannocchiale descriverà una superficie conica e prenderà la posizione $C'c'$, che fa coll'orizzontale mm' l'angolo $C'Qm = \frac{1}{2} CQC'$, e la visuale diretta all'asta la taglierà in E'. Ora sia D sul prolungamento della orizzontale mm', è chiaro che $DE' = DE$, e $AD = \frac{AE + AE'}{2}$. Abbassando adunque C' ed elevando c' finchè la visuale tagli l'asta in D, dove si sarà trasportata la linea fiduciale dello scopo, si sarà fatto orizzontale l'asse del cannocchiale.

Variando la forma dei livelli devesi pur anche variare il modo di verificarli e di rettificarli, e quantunque quello precedentemente esposto sia più generalmente usato e sia applicabile alla massima parte di tali stromenti, indicherò ancora il seguente che si adatta ad un livello di qualsivoglia costruzione, e che è forse il più sicuro fra quanti si potrebbero proporre.

Fatta stazione in A (fig. 79), e segnato il punto del terreno su cui cade la verticale abbassata dal centro O dell'oculare, si faccia colle opportune viti occupare il mezzo del tubo dalla bolla d'aria, e dopo di aver misurata l'altezza $OA = a$, si diriga una visuale all'asta collocata verticalmente sopra un secondo punto B distante da A di una quantità $D = 200^m$ circa, e si legga l'altezza $BC = b$ a cui si è dovuto innalzare lo scopo. Si porti poscia lo stromento in B, ivi si disponga in modo che il centro dell'oculare si trovi sulla verticale del punto B, e senza toccare alla vite del livello, si faccia andare la bolla d'aria nel mezzo del tubo; si misuri l'altezza $O'B = b'$, si diriga una visuale all'asta,

che si sarà fatta collocare in A, e si legga la nuova elevazione dello scopo $C'A=a'$. Se lo stromento fosse rettificato, le due visuali OC, $O'C'$, sarebbero orizzontali, e si troverebbe $a-b=a'-b'$; ma ciò non essendo, quantunque la bolla occupi il mezzo del tubo che la racchiude, lo stromento sarà ancora da rettificare, e le visuali faranno colle orizzontali OD e $O'D'$, gli angoli uguali $DOC=D'O'C'$. Supponiamo che l'oculare del cannocchiale sia più depresso dell'obbiettivo, le visuali OC e OC' verranno a battere l'asta collocata successivamente in B ed in A al disopra delle orizzontali OD e $O'D'$, in due punti C e C', distanti dai punti in cui le orizzontali la colpirebbero, della quantità $CD=C'D'=x$. Si dicano ancora α e β le altezze AD' e BD che si leggerebbero sulle aste se lo stromento fosse rettificato; si avrà evidentemente:

$$\alpha=a'-x,\ \beta=b-x;$$

ma è pure evidente che

$$a-\beta=\alpha-b';$$

d'onde risulterà, sostituendo in quest'equazione ad α e β i loro valori:

$$a-b+x=a'-b'-x;$$

ed

$$x=\frac{a'-b'-a+b}{2}=\frac{a'-b'-(a-b)}{2}.$$

Ora x è l'altezza a cui batte la visuale diretta dalla stazione B sull'asta collocata in A, al disopra del punto a cui colpirebbe la stessa visuale se il livello fosse rettificato: dunque movendo il cannocchiale finchè la visuale venga a battere l'asta nel punto D' al disotto di C' della quantità $\frac{a'-b'-(a-b)}{2}$, e riconducendo infine la bolla d'aria nel

mezzo del suo tubo senza più muovere il cannocchiale, il livello sarà rettificato.

È facile riconoscere che se l'oculare fosse più elevato dell'obbiettivo, si dovrebbe aggiugnere all'altezza $A\,C'$ la quantità $x=\frac{a-b-(a'-b')}{2}$.

124. **Correzione dovuta alla sfericità della terra.** — Da quanto si è detto intorno ai livelli risulta che essi servono a condurre delle visuali orizzontali, ossia a determinare dei piani orizzontali all'altezza dell'occhio dell'osservatore, e queste visuali e questi piani altro non sono che linee e piani di livello apparente.

Sia A (fig. 80) l'oculare di un livello rettificato, B un punto della superficie terrestre, distante dal centro della terra della quantità $CB=AC$: i punti A e B saranno di livello; ma a cagione della sfericità della terra, la linea di livello apparente AD condotta da A, epperciò perpendicolare all'estremità del raggio della terra CA che passa per questo punto, avrà un solo punto comune colla circonferenza massima che passa per A e B, e se in B si colloca un'asta BD verticale, la AD verrà a ferirla in D, ad un'altezza BD sopra il punto B, e questo punto sembrerà più basso di A di tutta la quantità BD. È adunque necessario, almeno quando i punti de' quali si cerca la differenza di livello sono molto distanti l'uno dall'altro, di tener conto degli errori derivanti dalla sfericità della terra.

Se si suppone prolungata la verticale BD al disotto del punto B, essa passerà pel centro C della terra, e verrà ad incontrarne la superficie in un punto E diametralmente

opposto a B; ora DE è una secante, BD la sua parte esterna, e DA una tangente, e sarà

$$DE \times DB = \overline{DA}^2;$$

$$\text{d'onde } DB = \frac{\overline{DA}^2}{DE}.$$

Ma $DE = DB + BE$; ed essendo BE il diametro della terra, la parte esterna DB è sempre una quantità piccolissima in confronto di BE, e si può senza errore sensibile supporre $DE = BE$. Chiamando pertanto R il raggio della terra, a la distanza AD, ed x la parte esterna DB, si avrà finalmente la formola:

$$x = \frac{a^2}{2R}.$$

La quale indica che *la differenza fra il vero livello ed il livello apparente, o la correzione dell'errore dovuto alla sfericità della terra, è uguale al quadrato della distanza diviso per il diametro della terra.*

Impiegando i logaritmi si troverebbe:

$$\log x = \text{compl. } \log 2R + 2 \log a;$$

e prendendo per valore medio di R quello di 6 366 198, sarebbe:

$$\log x = 2{,}89509 + 2 \log a.$$

Il valore di x si trova assai speditamente con questa formola, e si può con somma facilità costrurre una tavola per servirsene all'uopo.



LEZIONE DICIOTTESIMA.

ALTIMETRIA.

METODI DI LIVELLAZIONE - PROFILI - PIANI QUOTATI CURVE ORIZZONTALI - ECLIMETRI.

(letta il 24 aprile 1854).

SIGNORI,

Oltre l'errore, nella stima delle altezze, dovuto alla sfericità della terra, ve ne ha un altro in senso contrario, cagionato dalla *refrazione atmosferica*, che fa vedere gli oggetti più elevati di quello che realmente lo siano: per esempio, la mira D (fig. 81), che veduta da A, sembra essere sull'orizzontale AD, non è che in d, al disotto di questa visuale, e devesi perciò diminuire la correzione DB risultante dalla sfericità della terra, della quantità Dd.

125. **Correzione dell'errore dovuto alla refrazione atmosferica.** — Sia $DB = x$, $Dd = \varepsilon$; la correzione totale da farsi sarà $Bd = BD - Dd = x - \varepsilon$. L'angolo BAD formato da una corda AB e da una tangente AD, è la metà dell'angolo al centro C. L'angolo DAd non è costante, ma in seguito a ripetuti esperimenti si è trovato che il suo valore medio può considerarsi come uguale a 0,08 C. Ora gli archi descritti dal punto A come centro, con raggio AD, e compresi fra i lati AD e Ad, AD e AB, hanno le loro lunghezze sensibilmente proporzionali alle altezze $Dd = \varepsilon$,

e $DB = x$, ed essendo questi archi le misure degli angoli DAd, DAB, v'ha:

$$\text{angolo } DAB : \text{angolo } DAd :: x : \varepsilon;$$

$$\text{ossia } \frac{1}{2} C : 0{,}08C :: x : \varepsilon = 0{,}16\, x.$$

La correzione finale è dunque

$$x - \varepsilon = (1 - 0{,}16)\, x = 0{,}84\, x;$$

valore che può facilmente calcolarsi coi logaritmi.

Mediante questa formola è facile riconoscere che l'errore dovuto alla refrazione dell'atmosfera non ha un valore sensibile per le distanze che non oltrepassano 600 metri.

126. Esempio numerico della doppia correzione degli errori di sfericità e di refrazione. – Si supponga che con un cannocchiale di forza bastante siasi diretta una visuale orizzontale ad un punto distante 1864^{m}, e che siasi trovato questo punto più basso di quello di stazione di $3^{m},645$.

$$\text{Si avrà } x = \frac{(1864)^2}{2R},$$

$$\text{ed } x - \varepsilon = \frac{0{,}84}{2R}(1864)^2 = \frac{0{,}42}{R}(1864)^2;$$

d'onde:

$$\log(x - \varepsilon) = \log 0{,}42 + c.\log R + 2\log 1864;$$

$$2 \log 1864 = 6{,}54089$$

$$\log 0{,}42 = 9{,}62325$$

$$c.\log R = 3{,}19611$$

$$9{,}36026 = \log 0^{m},2292.$$

La differenza di livello fra i due punti è adunque ridotta a $3^{m},645 - 0^{m},229 = 3^{m},416$.

Abbiamo nel precedente esempio supposto che la forza del cannocchiale permettesse di dirigere una visuale orizzontale alla distanza di più di 1800^m; ciò in pratica non potrebbe accadere, almeno cogli ordinari livelli a cannocchiale, i quali non concedono di osservare a distanze maggiori di 300 a 400^m; ed anche in quest'ultimo caso si può trascurare la correzione, la quale non eccedendo un centimetro, è minore dell'errore che a tale distanza può risultare nella stima del punto in cui la visuale colpisce l'asta. A qualunque distanza poi si trovino i punti de' quali si cerca la differenza di livello, se il cannocchiale ha una forza sufficiente, si evitano le correzioni facendo stazione ad uguale distanza dai due punti, perchè è evidente che se v'ha $AD' = AD$ (fig. 80), vi sarà altresì $B'D' = BD$, ed essendo pure uguali le correzioni degli errori dovuti alla refrazione, nessuna correzione dovrà farsi sulle altezze lette sull'asta collocata successivamente nei due punti. Se la forza del cannocchiale, od altre circostanze non permettono di collocarsi ad uguale distanza dai due punti, si fanno allora due o più stazioni in modo che il livello si trovi ad ogni stazione ugualmente distante dai punti in cui si colloca l'asta, come vedremo fra breve.

127. **Livellazione semplice.** – *Trovare la differenza di livello fra due punti* A *e* B (fig. 82).

Si faccia stazione col livello ad uguale distanza dai punti *A* e *B* (se si adopera il livello ad acqua la distanza del livello dal punto a cui si collima, non deve essere maggiore di 50^m; se si impiega uno degli ordinari livelli a cannocchiale, già si è detto potere tale distanza essere di 200^m, od anche di 400^m, se il cannocchiale lo permette), fatta collocare l'asta in *A*, le si diriga una visuale orizzontale, e si legga, ad

esempio, $0^m,48$. Si faccia poscia trasportare l'asta in *B*, e dopo di averle diretta una visuale orizzontale si legga, supponiamo, $2^m,72$. Il punto *B* sarà più basso di *A* di $2,^m72 - 0,^m48 = 2,^m24$.

128. **Livellazione composta.** – *Trovare la differenza di livello fra due punti* A *e* B (fig. 83), *posti ad una distanza tale l'uno dall'altro che non basti il fare una sola stazione di livello.*

Si collochi l'asta in *A*, ed il livello alla distanza che le ineguaglianze del suolo e la forza dello stromento permettono; si diriga all'asta una visuale orizzontale, si faccia la lettura come si è detto più volte, e si noti in apposito registro: si trasporti l'asta in *C*, ad una distanza $lC = lA$, si operi come si è fatto per il punto *A*, e quindi si trasporti il livello in *l'*, si collimi all'asta in *C*, e dopo la solita lettura e notazione si trasporti l'asta in *D*, le si diriga una visuale orizzontale, si legga e si noti l'altezza. Si continui in tal modo finchè si giunga a dirigere un'ultima visuale all'asta collocata in *B*; osservando di non spostare il livello mentre si fanno le battute indietro e avanti, e di non muovere l'asta mentre si trasporta il livello dall'una all'altra stazione. Ciò fatto si troverà la differenza di livello fra i punti estremi *A* e *B*, facendo la somma delle battute indietro e la somma delle battute avanti, e in fine dalla maggior somma sottraendo la minore. Se la somma delle battute indietro eccede la somma delle battute avanti, il punto *A* sarà più depresso del punto *B*: il primo punto sarà invece più elevato del secondo se ha luogo il contrario. Infatti, si chiamino a, a', a'', a''', le battute indietro, b, b', b'', b''', le battute avanti; è chiaro che la differenza di livello tra i punti *A* e *B*, è uguale alla somma delle differenze di livello tra i punti *A* e *C*, *C* e *D*, *D* ed *E*, *E* e *B*. Ora la differenza tra i punti *A* e *C*

è $a - b$, quella fra i punti C e D è $a' - b'$, ecc.; dunque la differenza di livello fra i punti estremi sarà:

$$a - b + a' - b' + a'' - b'' + a''' - b''' =$$
$$a + a' + a'' + a''' - (b + b' + b'' + b'''),$$

129. **Livellazione in larghezza e lunghezza.** — Per eseguire la livellazione di una vasta superficie si può procedere in diversi modi secondo lo scopo che l'operatore si propone. Esso potrebbe, p. e., segnare sul terreno una linea AB (fig. 84) in una favorevole direzione, poscia percorrendo e facendo misurare questa linea, fare di tratto in tratto, e a distanze uguali, condurre delle nuove linee CD, EF, GH, IK, ecc., perpendicolari alla prima, e prendendo su queste delle distanze uguali AM, MC, AN, ND, LP, LQ, ecc., si finirebbe per aver coperto il terreno di una rete le cui maglie sarebbero tanti rettangoli uguali, ed i vertici di questi rettangoli, i punti da livellarsi, ad ognuno de'quali si farebbe infiggere nel suolo un piuolo. Procedendo poscia lungo una delle liuee così tracciate, si livellerebbero i punti posti sopra una o più linee parallele; si percorrerebbe poscia in ugual modo un'altra linea e poi un'altra, fino a livellazione compiuta; si farebbe infine la riduzione delle altezze ad una sola superficie di livello come fra breve diremo.

Il precedente metodo sarebbe solo applicabile allorchè fosse indifferente il prendere un punto piuttosto che un altro, purchè si venisse, mediante un sufficiente numero di punti, a conoscere colla desiderata approssimazione la forma del terreno. Spesse volte i punti sono prestabiliti: ciò ha luogo p. e., quando si vogliono, sopra una carta, fissare le altezze di punti facilmente sulla medesima reperibili: in questo caso non è più conveniente il seguire sul terreno la direzione di

linee fra loro parallele, ma si cammina irregolarmente secondo la natura del terreno e la situazione dei punti.

Sì in questo che nel precedente caso si possono tuttavia stabilire le seguenti norme e considerazioni generali. Fatta stazione in un sito da cui si possa scoprire un gran numero dei punti del terreno, si faccia successivamente portare l'asta su ciascuno di essi, dirigendole delle visuali orizzontali, e si notino le battute a, b, c, d ecc., ottenute in questa prima stazione, sul piano del terreno percorso, oppure sopra un apposito registro. Si scelga poscia un altro luogo per farvi una seconda stazione, colla condizione che da essa si possa collimare a tutti i punti circostanti e ad uno almeno di quelli a cui si è collimato dalla prima stazione: sieno a', b', c', d' ecc., le nuove battute trovate, ed α la lettura fatta sull'asta posta sopra uno dei punti precedentemente osservati. Si faccia una terza stazione da cui, oltre al poter collimare a tutti i punti posti a giusta distanza, si possa pure con una visuale orizzontale tagliare l'asta collocata in uno dei punti osservati dalla seconda stazione, e si continui in tal modo fino al compimento della livellazione.

130. **Riduzione della livellazione ad una sola linea o ad un solo piano di paragone.** — Dopo di aver effettuata una livellazione, onde poter a colpo d'occhio riconoscere le differenze di livello esistenti fra i vari suoi punti, è necessario di riferire tutte le altezze ad una stessa linea orizzontale, se trattasi d'una livellazione in lunghezza soltanto, o di riferirle tutte ad una stessa superficie orizzontale che si suppone condotta al disopra o al disotto di tutti i punti livellati, se la livellazione è stata fatta in lungo e in largo, ciò che dicesi anche: *riduzione ad uno stesso piano di paragone.* La linea od il piano di paragone si scelgono in modo che, essendo il

piano superiore o inferiore, nessuno dei punti rimanga sopra o sotto di esso, e che la distanza del punto di partenza o di uno dei punti più importanti, sia un multiplo esatto di 10, p. e., 10, 20, 100, ecc. Nelle grandi livellazioni che abbracciano un vasto tratto di terreno, si prende per piano di paragone il livello medio del mare.

Trattisi, per primo esempio, di una livellazione in lunghezza soltanto; sieno, come altra volta, a, a', a'', ecc., b, b', b'', ecc., le battute indietro e avanti; se l'orizzontale è superiore, detta k la quantità di metri aggiunta alla battuta a, sarà la quota del punto A espressa da $k + a$, e quella del punto C sarà $k + b$: per trovare la quota del terzo punto, si osservi che se da $k + b$ si toglie la *controbattuta* a' fatta sul punto C, mentre il livello era tra C e D, si avrà la distanza della orizzontale condotta col livello nella seconda stazione, dalla orizzontale a cui si riferiscono ora tutti i punti della livellazione, e questa distanza sarà $k + b - a' = k'$, a cui aggiungendo la battuta avanti, si avrà per la quota del punto D, $k + b - a' + b' = k' + b'$: continuando in tal modo a sottrarre dalla quota di un punto la controbattuta, e ad aggiugnere la battuta avanti fino al termine della livellazione, si otterranno le quote di tutti i punti. Se l'orizzontale fosse inferiore, si procederebbe in ordine inverso, vale a dire, che chiamata k la prima quota, la seconda sarebbe $k + a - b$, la terza $k + a - b + a' - b'$, ecc.

Per ridurre, in secondo luogo, tutte le altezze di una livellazione fatta in lungo e in largo, si fisserà questa superficie ad una distanza k da uno dei punti livellati nella prima stazione, che soddisfi alle condizioni precedentemente indicate. Ciò posto, ed essendo k la quota del punto A, pel quale

si è letto la battuta a e la controbattuta α, si troveranno le quote dei punti a cui si è collimato dalla prima stazione, deducendo dall'altezza k la battuta a, ed aggiugnendo alla differenza $k - a$, le battute di ognuno dei punti E, C, D ecc.; si otterranno in tal modo le rispettive quote $k - a + b$, $k - a + c$, $k - a + d$, ecc. Per passare alla seconda stazione, da k si deduca la controbattuta α; si avrà $k - \alpha$. Questa differenza indicherà la distanza del piano determinato dal livello nella seconda stazione, dal piano generale, e si troveranno le quote di tutti i punti a cui si è collimato da questa seconda stazione aggiugnendo a $k - \alpha$ successivamente le battute a', b', c', d'.... ecc. In modo analogo si perverrebbe a determinare le quote dei punti della terza, della quarta stazione, ecc.

131. **Profili e piani quotati.** — Eseguite le precedenti riduzioni, se si ha la pianta del terreno su cui siano indicati i punti ai quali si è nella livellazione collimato, si potrà scrivere accanto ad ognuno di essi il numero o la *quota* esprimente la sua altezza o depressione rispetto all'assunto piano di paragone, ciò che porgerà un'idea tanto più esatta della forma del terreno, quanto maggiore sarà il numero delle quote, ed il piano contenente queste quote si dirà *piano quotato.*

Spesso però si deve soltanto eseguire una livellazione longitudinale e diverse livellazioni trasversali normali alla prima, e poco estese da una parte e dall'altra della longitudinale, ed allora, terminata la livellazione e ridotte le altezze ad uno stesso piano orizzontale, si costruisce un *profilo longitudinale* e tanti *profili trasversali* quante sono le livellazioni trasversali eseguite.

La costruzione dei profili sì longitudinali che trasversali

non può presentare veruna difficoltà. Ecco le norme generali da seguirsi in simili operazioni: dopo di aver ridotte tutte le altezze ad un solo piano di paragone, si traccia sopra un foglio da disegno abbastanza grande, e nel senso della maggiore sua lunghezza, una linea retta, che deve rappresentare il piano sopraddetto, e servire di base al profilo longitudinale; su questa retta si portano, ad una determinata scala, successivamente tutte le distanze orizzontali, che prendono il nome di *ascisse*, ad ogni punto così segnato s'innalzano delle perpendicolari, su cui si portano le altezze che chiamansi *ordinate;* si uniscono poscia i punti estremi delle ordinate con linee; queste linee si tratteggiano per indicare il terreno, disegnando pure, semprecchè la grandezza della scala lo permetta, gli oggetti rimarchevoli, come i punti, le sezioni de'fiumi, de'canali e simili. Le altezze si prendono ad una scala maggiore di quella delle distanze orizzontali, ordinariamente decupla, e ciò per rendere più evidenti le ineguaglianze del terreno, specialmente nelle livellazioni che si fanno in pianura ove le ondulazioni sono bene spesso insensibili; così se la scala per le ascisse è di 1 a 5000, quella per le ordinate si fa di 1 a 500, ciò che offre anche il vantaggio di potersi servire di una sola scala sì per le une che per le altre.

Dopo di aver costrutto il profilo longitudinale, si fanno i profili trasversali, se possibile al dissotto di quello longitudinale; altrimenti si costruiscono sopra un foglio a parte, non ommettendo di scrivere sì nell'uno che negli altri tanto le distanze quanto le altezze, e ciò malgrado che i profili siansi fatti in scala, a scanso de' dubbi che potrebbero nascere dal servirsi di questa per riconoscere i dati. Si devono pure scrivere i numeri e le lettere corrispondenti di tutti i

punti, e notare i nomi e le indicazioni tutte dei punti principali, onde non essere costretti a consultare ad ogni istante il registro di campagna.

132. **Curve orizzontali.** - Siccome una sufficiente quantità di quote produce quasi sempre troppa confusione sul piano, si è dai topografi convenuto di supporre il terreno tagliato da una serie di piani orizzontali, fra loro equidistanti, i quali intersecandone la superficie a varie altezze, determinano altrettante curve orizzontali, che proiettate sul piano, danno una chiara idea delle irregolarità del terreno.

Siano A, B, C, E, ecc. (fig. 85) i vari punti quotati; questi punti si saranno presi sul terreno abbastanza vicini gli uni agli altri da poter supporre che le rette che li uniscono due a due si confondano approssimativamente colla superficie del medesimo. Sia il punto A il più basso di tutti, e suppongasi che l'infimo piano segante il terreno passi per questo punto, e che l'equidistanza dei piani sia y. La quota del punto A essendo $a = o$, le quote b, c, d, ecc. di tutti gli altri punti, esprimeranno le loro elevazioni sul piano orizzontale che passa per A. Ciò posto, se la quota di un punto, per esempio, di H, è minore di y, il punto H sarà inferiore al primo piano condotto al disopra di quello che passa per A, e per trovare un punto della superficie del terreno che sia posto su quel primo piano, epperciò sulla prima curva orizzontale, si unisca A con un punto E tale che la sua quota $e > y$; si tratta allora di trovare sulla retta AE un punto la cui altezza sia y.

A quest' uopo si supponga tagliato il terreno da un piano verticale lungo la retta AE; la sezione verrà rappresentata dal piccolo profilo della fig. 86. Nel triangolo rettangolo

AEE', essendo YY' parallela ad EE', se si fa $AE = h$, $AY' = h'$, si avrà evidentemente:

$$e : h :: y : h' = \frac{hy}{e},$$

e portando h' da A in Y', si avrà un punto della prima curva orizzontale, partendo dal punto A. Potrebbe darsi che fra A ed E passassero due o più curve orizzontali; ciò che succede quando $e > 2y$ o $> 3y$, ecc., e se $e = 2y$, il punto cercato Y' si trova sulla metà di AE, e pel punto E passa la seconda curva. Per trovare il punto Y''' compreso fra E ed F (fig. 85 e 87), si stabilirebbe quest'altra proporzione:

$$F'O' - FO' : OO' :: YY''' : OO'';$$

ovvero, supponendo

$$F'O' = f, FO' = e, OO' = h, YY''' = y, \text{ ed } OO'' = h';$$

$$f - e : h :: y : h' = \frac{hy}{f - e}.$$

Si vede facilmente e dalla figura 85, e da quanto si è detto, che continuando ad operare in tal modo pei punti I, K, G, M, N, L, ecc., si avranno con tanto maggior precisione le curve orizzontali, quanto più grande sarà il numero de' punti quotati, e quanto migliore sarà stata la scelta di questi punti e l'arte di collegarli fra loro con linee rette.

Le curve orizzontali si possono anche segnare con paline sul terreno, ed i poligoni determinati dalle paline si possono poi rilevare secondo i metodi insegnati dalla geodesia elementare. A quest'uopo si chiami sempre y l'equidistanza de' piani orizzontali, i quali intersecando la superficie del terreno

determinano le curve orizzontali, e sia A il punto più basso contenuto sul piano su cui si vogliono disegnare le curve. Fatta stazione in un punto del terreno diverso da A, si collochi l'asta in A e se le diriga una visuale orizzontale: sia a la battuta risultante, si fissi lo scopo all'altezza $a - y$, e poscia si collochi successivamente l'asta in vari punti del terreno, e si segnino con paline tutti quelli, pei quali le visuali dirette dal cannocchiale all'asta collocata su di essi, hanno incontrato la linea fiduciale dello scopo mantenuto all'altezza $a - y$; è chiaro che dopo ciò la linea poligonale che unisce i piedi delle paline è orizzontale. Come si sarà segnata sul terreno questa prima curva orizzontale, se ne potranno segnare tante altre che si vorrà. Non sempre basterà una sola stazione per tracciare tutta una curva orizzontale, ma converrà anzi per lo più fare diverse stazioni, ciò che non renderà più difficile l'operazione. Si potrà per contro molte volte tracciare da una sola stazione, delle porzioni di varie curve, quando le equidistanze dei piani che le contengono non superino la lunghezza dell'asta.

Quando si saranno con uno dei precedenti metodi segnate le curve su di un piano, e che si saranno quotate alcune di esse, questo piano rappresenterà all'occhio pratico le accidentalità della superficie su di esso proiettata, e non sarà difficile lo ottenere tanti profili che si vorrà di detta superficie, col supporla tagliata da un piano verticale in quella direzione che si desidera.

Sia p. e. la fig. 88 un piano a curve orizzontali all'equidistanza di un metro; se si vorrà il profilo del terreno fatto lungo la retta AB, si condurrà una retta indefinita $A'B'$ (fig. 89), su questa si porteranno alla scala del disegno le distanze orizzontali ab, bc, cd, de, ef, fg, ecc. in $a'b'$, $b'c'$,

$c'd'$, $d'e'$, $e'f'$, $f'g'$, ecc.; parallelamente alla fondamentale $A'B'$, ed all'equidistanza di un metro, si tireranno tante rette (*). S'innalzeranno nei punti b', c', d', e', f', g', ecc. delle perpendicolari; queste taglieranno le parallele nei punti b'', c'', d'', e'', f'', g'', ecc.; si uniranno finalmente questi punti di due in due, e ne risulterà una linea ondulata che rappresenterà il chiesto profilo. Operando analogamente per altre sezioni, si otterranno tanti altri profili CD (fig. 90), EF (fig. 91), che si vorrà.

133. **Linee di pendenza massima.** – Per rappresentare viemeglio la forma del terreno, alle curve orizzontali si usa ancora aggiugnere altre linee dette *linee di pendenza massima*, disegnando sul piano le loro proiezioni comprese fra due curve attigue, normalmente alle medesime.

Queste linee, che s'immaginano condotte da un punto di una curva orizzontale ad un punto della curva immediatamente inferiore, sono così chiamate, perchè supponendo che la zona di terreno compresa fra due curve consecutive sia una superficie generata da una linea retta che si muova appoggiandosi costantemente alle due curve, e mantenendosi sempre in un piano verticale perpendicolare alla curva inferiore, ognuna di queste linee si potrà considerare come una delle posizioni di detta linea generatrice, e sarà perciò la linea più breve fra quante si possano condurre per uno stesso punto fra le due curve, e nello stesso tempo sarà pur quella che farà coll'orizzonte l'angolo più grande, e sarà perciò quella che avrà la massima pendenza.

Un piano che rappresenti le accidentalità del suolo mediante le curve orizzontali e le proiezioni delle linee di pen-

(*) Le altezze si fanno ordinariamente ad una scala maggiore di quella del piano; quelle della figura sono ad una scala doppia.

denza massima, prende il nome di *piano topografico* o di *carta topografica;* anzi sulle carte topografiche si tracciano soltanto le curve colla matita per poterle togliere dopo che si sono disegnate le linee di pendenza massima.

Quanto abbiam detto intorno alle curve orizzontali ed alle linee di pendenza massima può bastare per dare un'idea del modo di tracciare queste linee: il trattenerci più a lungo su questa materia ci condurrebbe a parlare del disegno topografico, ciò che è fuori del nostro assunto.

134. **Clisimetri ed eclimetri.** – Oltre i livelli finora descritti, mediante i quali si dirigono delle visuali orizzontali, si fa uso per livellare, specialmente nella topografia, di altri stromenti coi quali si dirigono delle visuali comunque inclinate all'orizzonte, e che vengono perciò chiamati *livelli di pendenza.*

Questi stromenti prendono ordinariamente il nome di *clisimetri* se danno immediatamente il rapporto tra la pendenza e la distanza orizzontale, e di *eclimetri* se danno invece l'angolo fatto dalla visuale coll'orizzonte o colla verticale.

Essendo il clisimetro poco in uso nella topografia, descriveremo soltanto il più semplice, cioè quello a pendolo: è desso un livello a pendolo analogo a quello già più volte citato, colla sola differenza che invece di avere il braccio BC (fig. 93) che unisce i due lati AB ed AC, diviso in due sole parti uguali in D, lo ha diviso in 200 parti, cioè 100 da D in B, e 100 da C in D. L'uso di questo stromento è facile a comprendersi; se esso si applica sopra una linea inclinata MN, il filo invece di battere in D sul mezzo di BC, verrà a battere in un altro punto, per esempio in E; e per essere i due triangoli ADE, MNP simili,

si avrà $AD : DE :: PN : MP = \frac{DE}{AD} \times PN$.

Conoscendo adunque il rapporto $\frac{DE}{AD}$, si conoscerà la pendenza MP della linea MN. Per rendere più facile l'uso di questo stromento, si mette sopra un trepiede munito di ginocchiera mediante la quale può prendere qualsivoglia direzione ed inclinarsi a piacimento; in tal caso si adattano due traguardi in B e C onde dirigere le visuali ai segnali posti alle estremità dei declivi.

L'eclimetro si adatta ordinariamente alla bussola topografica o alla diottra della tavoletta pretoriana. Questi stromenti possono variare nella loro forma, ma constauo sempre o di un circolo intero, o di un semicircolo (fig. 93), o di due archi di circolo graduati, applicati sulla medesima faccia laterale a cui è attaccato il cannocchiale, e di due vernieri diametralmente fra loro opposti. Dalla parte del semicircolo opposta a quella del cannocchiale, v' ha un livello a bolla d'aria, col suo asse parallelo al piano del semicircolo predetto. Il cannocchiale si muove intorno ad un asse perpendicolare al piano del semicircolo, e che passa pel suo centro, ed i zeri dei vernieri devono trovarsi sopra una linea condotta per lo stesso centro.

In due differenti maniere si possono graduare gli archi degli eclimetri; cioè mettendo alle estremità del diametro che indica la posizione orizzontale dell'asse del cannocchiale, i zeri, oppure 90°. Il primo modo di graduazione dà gli angoli di depressione quando le letture si fanno sul verniere posto verso l'oculare, e gli angoli di elevazione quando si fanno sul verniere posto verso l'obbiettivo: col secondo si misurano gli *angoli zenitali* detti altrimenti *distanze zenitali*. Impiegando eclimetri divisi nel primo modo, si deve indicare per ciascun angolo se l'oggetto osservato sia più alto o più

basso del centro dello stromento; se invece l'eclimetro di cui si fa uso è graduato nel secondo modo, la grandezza stessa dell'angolo rende ciò manifesto.

Le verificazioni e le rettificazioni da farsi a questo stromento sono analoghe a quelle che si fanno al livello a bolla d'aria con cannocchiale: così si deve prima d'ogni cosa rettificare il livello a bolla d'aria; cioè fare che la sua bolla non abbandoni il mezzo del tubo di vetro che lo contiene mentre si fa girare lo stromento intorno al suo asse verticale. Si deve poscia condurre l'asse del cannocchiale ad essere parallelo all'asse del livello quando i due zeri dei vernieri coincidono, operando nel seguente modo: dopo di aver guidata la bolla d'aria nel mezzo del tubo del livello ll' (fig. 94), si diriga una visuale ad un oggetto ben determinato M, e si faccia la lettura dell'arco $E'b$; si faccia poscia descrivere un mezzo giro a tutto lo stromento intorno al suo asse verticale: dopo ciò è chiaro che se l'asse del cannocchiale aveva prima la direzione ab, ora avrà quella $b'a'$, ed il semicircolo che prima aveva la posizione ENE', ora avrà quella DND', e riconducendo l'oculare all'occhio, collimando nuovamente al punto M, esso riprenderà la direzione ab. Se si leggesse nuovamente lo stesso numero di gradi che prima si era letto, lo stromento sarebbe rettificato, ma d'ordinario ciò non succede, e la seconda lettura $D'b$ differisce dalla prima $E'b$; in questo caso si cerchi la differenza $E'b - D'b = E'D'$: la metà $D'z'$ di questa differenza, misurerà l'angolo che l'asse del cannocchiale farebbe coll'orizzonte zz', se i zeri coincidessero, angolo che chiamasi *errore di collimazione*.

Alcuni eclimetri permettono mediante una vite di richiamo di imprimere un leggero movimento nel senso verticale al semicircolo, ed in questo caso, dopo di aver fatto segnare

dal verniere l'angolo corretto dell'errore di collimazione, si imprime il suindicato moto al semicircolo, e senza più toccare il cannocchiale, si porta il suo asse a battere nel mezzo dell'oggetto da prima osservato. Siccome però questo movimento del semicircolo toglie il livello dall'orizzontalità, si deve in seguito ricondurre la bolla nel mezzo del suo tubo mediante la vite di richiamo del livello. Si dovranno ripetere alcune volte le osservazioni e correzioni prima che l'eclimetro sia perfettamente rettificato. Negli eclimetri che non hanno il movimento del semicircolo, si deve tener conto dell'errore di collimazione, ed aggiugnerlo o toglierlo, secondo i casi, dagli angoli osservati.

Le livellazioni che si eseguiscono coll'eclimetro consistendo nella misura diretta degli angoli di pendenza fatti da linee comprese fra punti de' quali si conoscono le distanze, per ottenere la differenza di livello, p. e. fra i due punti B e C (fig. 95), si dovrà tener conto dell'altezza del centro del semicircolo dal punto del suolo su cui si fa stazione, e dell'altezza del segnale D a cui si collima al disopra dell'oggetto B, del quale si cerca la depressione o l'altezza rispetto al punto C; perchè la differenza di livello fra i due punti B e C, è:

$$CA = OA - OC = OE - OC + EA.$$

Chiamando δ l'angolo misurato, e k la distanza orizzontale dei due punti considerati, si avrà:

$$OE = k \; tang \; \delta,$$

se si è misurato l'angolo di depressione $m\,On = ODE$, ed

$$OE = k \; cot \; \delta,$$

se si è misurato l'angolo zenitale mOz. Si avrà adunque nel primo caso, facendo $OC = H$, $DB = T$:

$$CA = k \, tang \, \delta - H + T,$$

e nel secondo caso

$$CA = k \cot \delta - H + T.$$

Se la distanza fra i due punti fosse abbastanza grande da non potersi trascurare le correzioni dovute alla sfericità della terra ed alla refrazione, le predette formole si convertirebbero nelle seguenti:

$$CA = k \, tang \, \delta - \frac{0{,}42}{R} k^2 - H + T,$$

$$CA = k \cot \delta - \frac{0{,}42}{R} k - H + T.$$

Nelle livellazioni finalmente di un tratto di terreno, eseguite coll'eclimetro, si dovranno distinguere coi segni + e — gli angoli di depressione o di elevazione, e le depressioni od elevazioni dei punti osservati al disotto o al disopra del punto di partenza.

Signori,

Con questa 28ma Lezione io compio l'onorevole incarico che mi venne affidato. — Nel rapido mio corso io dovetti cercar di riunire nel minimo spazio tutto ciò che può essere più necessario a conoscersi nell'arte di levare i piani. — Permettetemi, Signori, di sperare che le deboli mie fatiche saranno per riuscire a tutti voi di qualche vantaggio. — Ed abbiatevi tutta la mia riconoscenza per l'indulgenza di cui mi foste sì largamente cortesi.

Fine.

INDICE



NOZIONI GEOMETRICHE.

LEZIONE I.

Livello a pendolo e a bolla d'aria semplici, scale grafiche e verniere rettilineo.

LEZIONE II.

Allineamenti. Misura delle distanze colle canne metriche, colla catena metrica e colla stadia.

LEZIONE III.

Scale di riduzione all'orizzonte.
Questioni risolte col solo segnare e misurare linee rette sul terreno.

LEZIONE IV.

Misura degli angoli - Squadro ordinario.
Verniere curvilineo.

LEZIONE V.

Squadro graduato - Grafometro - Rapportatore grafico.

LEZIONE VI.

Tavoletta pretoriana - Declinatorio.

LEZIONE VII.

Questioni planimetriche risolte colla tavoletta.
Bussola topografica.

LEZIONE VIII.

Rilevamento de' piani colla bussola topografica. Teodolite ripetitore.

LEZIONE IX.

Misura delle superficie piane - Divisione delle medesime.

LEZIONE X.

Riduzione delle figure.

NOZIONI TRIGONOMETRICHE.

LEZIONE I.

Cenni sui logaritmi.

LEZIONE II.

Uso delle tavole de' logaritmi.

LEZIONE III.

Costruzione de' triangoli - Algoritmo trigonometrico.
Proprietà geometriche delle linee trigonometriche.

LEZIONE IV.

Valori correlativi delle linee trigonometriche.
Formole trigonometriche.

LEZIONE V.

Formole trigonometriche - Calcolo delle linee trigonometriche.

LEZIONE VI.

Risoluzione de' triangoli rettangoli.
Principii per la risoluzione de' triangoli obbliquangoli,

LEZIONE VII.

Risoluzione de' triangoli obbliquangoli.

LEZIONE VIII.

Risoluzione de' triangoli. - Applicazioni numeriche.

LEZIONE IX.

Coordinamento d'un punto ad una base, di più punti fra di loro e di più punti a più basi.

LEZIONE X.

Misura di una base trigonometrica. Riduzione delle distanze all'orizzonte.

LEZIONE XI.

Determinazione di un punto col mezzo di altri tre noti di posizione. Riduzione di un angolo all'orizzonte.

LEZIONE XII.

Riduzione di un angolo al centro di stazione.

LEZIONE XIII.

Calcolo delle distanze dalla meridiana e dalla sua perpendicolare. Determinazione di distanze inaccessibili.

LEZIONE XIV.

Principii geometrici sulla sfera.

LEZIONE XV.

Cenni sulle operazioni dell'alta geodesia.

LEZIONE XVI.

Determinazione della meridiana di un luogo e misura degli azimuti.

LEZIONE XVII.

ALTIMETRIA.

Livelli.

LEZIONE XVIII.

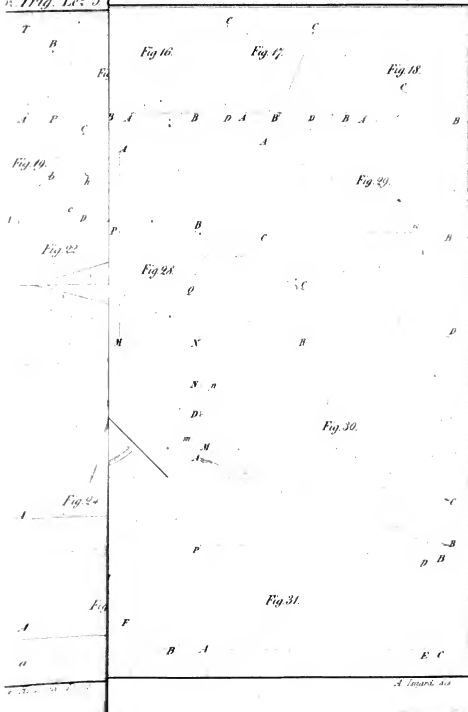
ALTIMETRIA.

Metodi di livellazione - Profili - Piani quotati - Curve orizzontali. - Eclimetri.

ERRATA.

Pag. 245, linea 17. $x=B$, $y=C$: si legga $y=B$, $x=C$.

Nella numerazione de' paragrafi si omisero i numeri dal 49 al 57, inclusivamente, e si è ripetuto due volte il numero 82. I paragrafi, invece di essere 134, come appare dall'ultimo numero, sono perciò soltanto 126.


Trig. Le: 5ª
Fig.16.
Fig.17.
Fig.18.
Fig.19.
Fig.22
Fig.28.
Fig.29.
Fig.30.
Fig.24
Fig.31.
A B C D P Q M N n m E F
A. Isnardi inc.

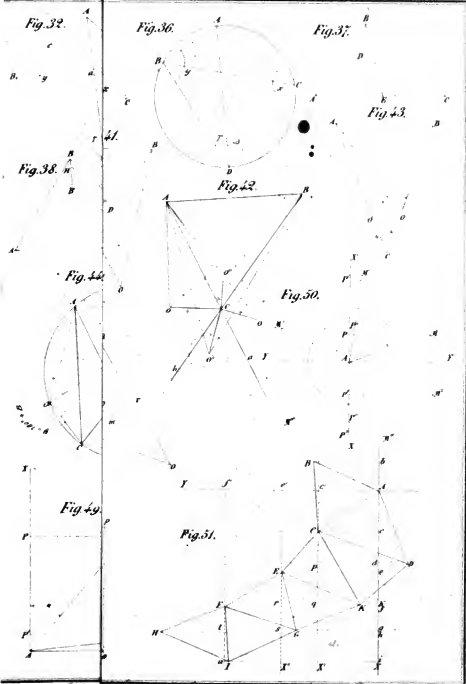
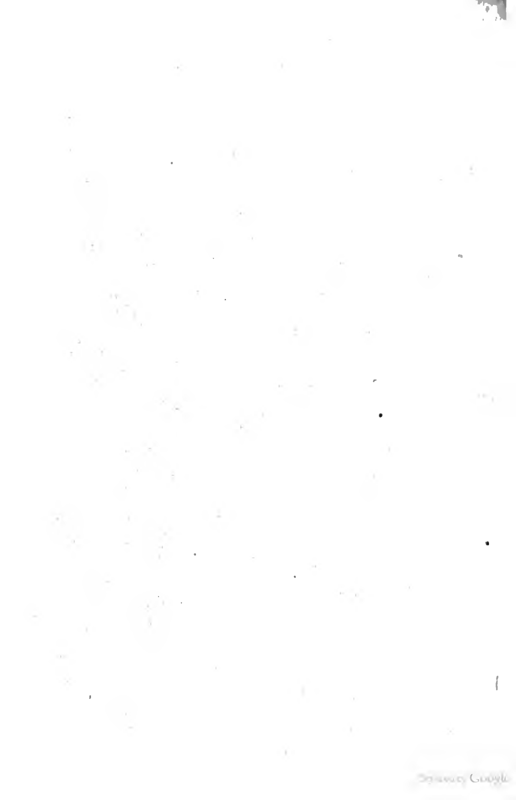

Fig. 32.
Fig. 36.
Fig. 37.
Fig. 38.
41.
Fig. 42.
Fig. 43.
Fig. 44.
Fig. 49.
Fig. 50.
Fig. 51.

Fig. 58.



Lit. Cheyend Torino
A. Isnardi dis.



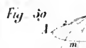
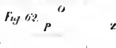
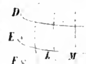
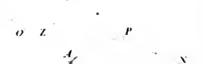
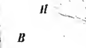
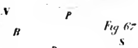

Fig. 59

Fig. 62.

Fig. 63





Fig. 67

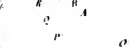
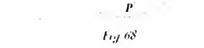
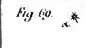



Fig. 68

Fig. 60.




Fig. 71.




Fig. 72.


Fig. 77





